CAPÍTULO

4

Ecuaciones diferenciales de orden superior

4.7.1 Variación de parámetros para ED de orden n

Descripción del método general

Una vez discutido el método de variación de parámetros para ecuaciones diferenciales de orden 2, en esta sección extenderemos dicho método a ecuaciones diferenciales de orden n para $n > 2$. Así, consideraremos el caso de la ED lineal no homogénea normalizada:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x); \tag{4.1}$$

cuya ED homogénea asociada es

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0. \tag{4.2}$$

Suponemos conocido el conjunto fundamental de soluciones:

$$\{\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)\},$$

con el cual podemos formar la solución general de la ecuación (4.2),

$$\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x). \tag{4.3}$$

En lo que sigue, supondremos también que las funciones $a_{n-1}(x), \cdots, a_0(x)$ & $g(x)$ son continuas en el intervalo (α, β), donde el conjunto de funciones $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)\}$ satisface:

$$W[\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)] = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \cdots & \phi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ para todo } x \in (\alpha, \beta).$$

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

Como vimos en la sección anterior, el método se apoya en la idea de que las constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ de la ecuación (4.3) las podemos reemplazar por un conjunto $\{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)\}$ de funciones indeterminadas por conocer, que permiten generar una solución particular

$$y_p(x) = u_1(x)\phi_1(x) + u_2(x)\phi_2(x) + \cdots + u_n(x)\phi_n(x) \tag{4.4}$$

de la ecuación (4.1). Como queremos determinar n funciones, es de esperarse que debemos imponer n condiciones a las funciones $u_j(x),\ j = 1, 2, \ldots, n$.
Es claro que una de las condiciones debe ser sin lugar a dudas el cumplimiento de la ecuación (4.1).
La idea central de este método radica en no resolver para las funciones $u_j(x)$ ecuaciones diferenciales que sean de orden mayor que 1, es decir, buscaremos las restantes $n-1$ condiciones de manera que nunca tengamos que considerar alguna relación en la que intervenga alguna derivada $u_j^{(k)}(x)$ para $k > 1$.
Con esto en mente, a partir de (4.4) obtenemos al derivar:

$$y_p' = [u_1\phi_1' + u_2\phi_2' + \cdots + u_n\phi_n'] + [u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 + \cdots + u_n'\phi_n].$$

Para asegurar que no aparezca alguna $u_j''(x)$, al calcular la segunda derivada, requerimos que en el intervalo (α, β):

$$u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 + \cdots + u_n'\phi_n = 0. \tag{4.5}$$

Entonces, tenemos ahora:

$$y_p' = u_1\phi_1' + u_2\phi_2' + \cdots + u_n\phi_n'.$$

Por lo tanto,

$$y_p'' = [u_1\phi_1'' + u_2\phi_2'' + \cdots + u_n\phi_n''] + [u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' + \cdots + u_n'\phi_n'].$$

Por la misma razón que expusimos anteriormente, ahora planteamos la condición:

$$u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' + \cdots + u_n'\phi_n' = 0. \tag{4.6}$$

De donde se desprende que

$$y_p'' = u_1\phi_1'' + u_2\phi_2'' + \cdots + u_n\phi_n''. \tag{4.7}$$

Si proseguimos de la misma manera, determinamos que se deben cumplir las relaciones:

$$u_1'\phi_1^{(h)} + u_2'\phi_2^{(h)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(h)} = 0,\ h = 0, 1, 2, \ldots, n-2, \tag{4.8}$$

y

$$y_p^{(k)} = u_1\phi_1^{(k)} + u_2\phi_2^{(k)} + \cdots + u_n\phi_n^{(k)} \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.9}$$

Finalmente, si para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ usamos las relaciones (4.9) en (4.1), hallamos:

$$\begin{aligned}&\underbrace{u_1\phi_1^{(n)} + \cdots + u_n\phi_n^{(n)} + u_1'\phi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-1)}}_{y_p^{(n)}} + a_{n-1}\underbrace{[u_1\phi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n\phi_n^{(n-1)}]}_{y_p^{(n-1)}} + \cdots + \\ &+ a_0\underbrace{[u_1\phi_1 + \cdots + u_n\phi_n]}_{y_p} = g(x).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ahora reacomodamos la ecuación (4.10) factorizando $u_1, u_2 \cdots u_n$:

$$\begin{aligned}u_1[\phi_1^{(n)} + a_{n-1}\phi_1^{(n-1)} + \cdots + a_0\phi_1] + \cdots + u_n[\phi_n^{(n)} + a_{n-1}\phi_n^{(n-1)} + \cdots + a_0\phi_n] + \\ + [u_1'\phi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-1)}] = g(x).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Notemos que como cada una de las funciones del conjunto $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)\}$ satisface a la ecuación (4.2), todos los términos en (4.11) son iguales a cero con excepción del último; esto permite llegar a la conclusión de que

$$u_1'\phi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-1)} = g(x). \tag{4.12}$$

Al reunir todas las condiciones indicadas en (4.8) junto con la ecuación (4.12), concluimos que las funciones incógnitas $u_1', \ldots, u_n'$ satisfacen a las condiciones:

$$\begin{cases} u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 + \cdots + u_n'\phi_n & = 0; \\ u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' + \cdots + u_n'\phi_n' & = 0; \\ \vdots & \\ u_1'\phi_1^{(n-2)} + u_2'\phi_2^{(n-2)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-2)} & = 0; \\ u_1'\phi_1^{(n-1)} + u_2'\phi_2^{(n-1)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-1)} & = g(x). \end{cases} \tag{4.13}$$

Ahora bien, como indicamos anteriormente:

$$W[\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)] \neq 0 \text{ , para todo } x \in (\alpha, \beta) \text{ .}$$

Por lo tanto, considerando (4.13) como un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $u_1', \ldots, u_n'$, podemos utilizar la regla de Cramer para obtener la solución única para $u_1', \ldots, u_n'$. Obtenemos:

$$u_k' = \frac{W_k}{W[\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)]} = \frac{W_k}{W}; \; k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.14}$$

Donde W_k difiere de $W[\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)] = W$ en que tiene, como columna k-ésima, a la columna:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{bmatrix}.$$

Las funciones $W = W(x)$ y $W_k = W_k(x)$ son continuas; en consecuencia, las expresiones $u_k' = \dfrac{W_k}{W}$ son integrables; por lo tanto, integrando se determinan las funciones incógnitas $u_1(x), \ldots, u_n(x)$.
Finalmente observe que, si en lugar de la ecuación diferencial (4.1), tuviéramos

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x)$$

–es decir, si $a_n(x)$ no fuese idénticamente igual a 1–, entonces habría que poner $g(x) = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}$ en lugar de $g(x)$ en la última ecuación de (4.13). En otras palabras, habría que normalizar la ED.

Ejemplo 4.7.1 *Resolver la ED* $\quad y^{(3)} + 4y' = \cot 2x$.

▼ Primero observamos que esta ecuación diferencial no puede ser resuelta por medio del método de coeficientes indeterminados debido a la presencia de la función cotangente. La ED está normalizada, ya que el coeficiente de la mayor derivada de la ecuación es igual a 1.
Para la solución, determinamos en primer lugar la ecuación característica correspondiente a la ED asociada:

$$r^3 + 4r = r(r^2 + 4) = 0.$$

Las raíces de esta ecuación algebraica son $r_1 = 0$; $r_{2,3} = \pm 2i$. Por lo tanto, el conjunto fundamental de soluciones está integrado por las funciones

$$\phi_1 = 1, \; \phi_2 = \cos 2x \;\&\; \phi_3 = \operatorname{sen} 2x.$$

El wronskiano $W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ es

$$W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ 0 & -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \\ 0 & -4\cos 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix} = 8\operatorname{sen}^2 2x + 8\cos^2 2x =$$
$$= 8[\operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 2x] = 8.$$

De acuerdo a lo discutido en el procedimiento general, requerimos hallar W_1, W_2 y W_3. Tenemos:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ 0 & -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \\ \cot 2x & -4\cos 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix} = \cot 2x[2\cos^2 2x + 2\operatorname{sen}^2 2x] = 2\cot 2x;$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \operatorname{sen} 2x \\ 0 & 0 & 2\cos 2x \\ 0 & \cot 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix} = -\cot 2x[2\cos 2x] = -2\cot 2x\cos 2x;$$

y también:

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & 0 \\ 0 & -2\operatorname{sen} 2x & 0 \\ 0 & -4\cos 2x & \cot 2x \end{vmatrix} = -2\operatorname{sen} 2x\cot 2x = -2\cos 2x.$$

De esta manera, obtenemos para u_1, u_2, u_3 las siguientes expresiones:
Para u_1,

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W}\,dx = \int \frac{2\cot 2x}{8}\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)\ln(\operatorname{sen} 2x) = \frac{1}{8}\ln(\operatorname{sen} 2x).$$

Para u_2,

$$u_2 = \int \frac{W_2}{W}dx = \int \frac{-2\cot 2x\cos 2x}{8}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{\cos^2 2x}{\operatorname{sen} 2x}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{1-\operatorname{sen}^2 2x}{\operatorname{sen} 2x}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\left[\int \csc 2x\,dx - \int \operatorname{sen} 2x\,dx\right] = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln(\csc 2x - \cot 2x) + \frac{1}{2}\cos 2x\right] =$$
$$= -\frac{1}{8}\ln(\csc 2x - \cot 2x) - \frac{1}{8}\cos 2x.$$

Finalmente para u_3,

$$u_3 = \int \frac{W_3}{W}\,dx = \int \frac{-2\cos 2x}{8}dx = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen} 2x = -\frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x.$$

Estamos ahora listos para obtener la solución general la cual, como sabemos, resultará sumando la solución complementaria y la solución particular que calculamos con el método de variación de parámetros. De esta manera la solución general de la ED es

$$\begin{aligned} y &= [c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3] + [u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + u_3\phi_3] = \\ &= c_1 + c_2\cos 2x + c_3\operatorname{sen} 2x + \\ &+ \frac{1}{8}\ln(\operatorname{sen} 2x) - \frac{1}{8}\ln(\csc 2x - \cot 2x)\cos 2x - \underbrace{\frac{1}{8}\cos^2 2x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^2 2x}_{=-\frac{1}{8}} = \\ &= c_1 + c_2\cos 2x + c_3\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\ln(\operatorname{sen} 2x) - \frac{1}{8}\ln(\csc 2x - \cot 2x)\cos 2x. \end{aligned}$$

□

La ecuación diferencial de Cauchy-Euler

El ejemplo anterior muestra cómo generar una solución particular y la consecuente solución general de la ED por el método de variación de parámetros si tan sólo se conoce un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada. Hay que decir que tuvimos a nuestro favor que la ecuación homogénea es de coeficientes constantes, característica que facilitó la determinación del conjunto fundamental.
Si los coeficientes no son constantes, la tarea puede resultar más compleja con excepción de algunos casos particulares, como el que discutimos a continuación.

- La ED de Cauchy-Euler de orden n tiene la siguiente forma general:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x), \text{ donde } a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ son constantes.}$$

La ED de Cauchy-Euler de orden 3 tiene la siguiente forma:

$$a_3 x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x). \tag{4.15}$$

Este tipo de ED se puede reducir a una ED de coeficientes constantes, si se realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = e^t.$$

Derivamos usando la regla de la Cadena:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{d}{dt}(e^t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{e^t} = e^{-t}\frac{dy}{dt}.$$

Es decir,

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}. \tag{4.16}$$

Al calcular la segunda derivada:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{d}{dt}(e^t)} = \frac{e^{-t}\frac{d^2 y}{dt^2} - e^{-t}\frac{dy}{dt}}{e^t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Es decir,

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right). \tag{4.17}$$

Para la tercera derivada encontramos que

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right]}{\frac{d}{dt}(e^t)} =$$

$$= \frac{e^{-2t}\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) - 2e^{-2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)}{e^t} = e^{-3t}\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right).$$

Es decir,

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right). \tag{4.18}$$

Al usar (4.16), (4.17) y (4.18) en (4.15), y tomando en consideración que $x^{-1} = e^{-t}$, obtenemos una ED con coeficientes constantes y variable independiente t.

Ejemplo 4.7.2 *Resolver la ED* $x^3y^{(3)} + 3x^2y'' - 3xy' = x\ln x$.

▼ Si usamos (4.16), (4.17) y (4.18) en la ED, obtenemos:

$$e^{3t}\left[e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)\right] + 3e^{2t}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] - 3e^t\left[e^{-t}\frac{dy}{dt}\right] = e^t\ln e^t.$$

Que se simplifica como

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 3\frac{dy}{dt} = te^t,$$

o bien como

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{dy}{dt} = te^t.$$

Ésta es una ED con coeficientes constantes; para resolverla aplicamos el procedimiento conocido. En este caso, la ecuación característica asociada a la ED homogénea es

$$r^3 - 4r = r(r^2 - 4) = r(r-2)(r+2) = 0,$$

cuyas raíces son $r_1 = 0, r_2 = 2$ & $r_3 = -2$. Deducimos entonces que un conjunto fundamental de soluciones está integrado por las funciones:

$$\phi_1 = 1, \quad \phi_2 = e^{2t} \quad \& \quad \phi_3 = e^{-2t}.$$

El wronskiano correspondiente para este caso es

$$W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & e^{-2t} \\ 0 & 2e^{2t} & -2e^{-2t} \\ 0 & 4e^{2t} & 4e^{-2t} \end{vmatrix} = 8 + 8 = 16.$$

Y las funciones W_1, W_2 y W_3 son

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2t} & e^{-2t} \\ 0 & 2e^{2t} & -2e^{-2t} \\ te^t & 4e^{2t} & 4e^{-2t} \end{vmatrix} = te^t[-2-2] = -4te^t.$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-2t} \\ 0 & 0 & -2e^{-2t} \\ 0 & te^t & 4e^{-2t} \end{vmatrix} = 2te^{-t}.$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 4e^{2t} & te^t \end{vmatrix} = 2te^{3t}.$$

Por último, integramos por partes para determinar las funciones incógnitas u_1, u_2 & u_3:

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W}dt = \int \frac{-4te^t}{16}dt = -\frac{1}{4}\int te^t\,dt = -\frac{1}{4}e^t(t-1).$$

$$u_2 = \int \frac{W_2}{W}dt = \int \frac{2te^{-t}}{16}dt = \frac{1}{8}\int te^{-t}\,dt = -\frac{1}{8}e^{-t}(t+1).$$

$$u_3 = \int \frac{W_3}{W}dt = \int \frac{2te^{3t}}{16}dt = \frac{1}{8}\int te^{3t}\,dt = \frac{1}{72}e^{3t}(3t-1).$$

En conclusión, la solución de la ED está dada por

$$\begin{aligned}
y &= [c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3] + [u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + u_3\phi_3] = \\
&= [c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{-2t}] - \frac{1}{4}e^t(t-1) - \frac{1}{8}e^{-t}(t+1)e^{2t} + \frac{1}{72}e^{3t}(3t-1)e^{-2t} = \\
&= [c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{-2t}] + e^t\left[-\frac{1}{4}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{8} + \frac{1}{24}t - \frac{1}{72}\right] = \\
&= [c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{-2t}] + \frac{1}{9}e^t(1-3t).
\end{aligned}$$

Sin embargo, en la ecuación inicial, no es t la variable independiente, sino x.
De $x = e^t$, hallamos que $t = \ln x$. Si lo utilizamos en el resultado anterior, encontramos:

$$y = c_1 + c_2x^2 + c_3x^{-2} + \frac{1}{9}x(1 - 3\ln x).$$

□

Ejemplo 4.7.3 *Resolver el siguiente PVI:*

$$x^2y^{(3)} - xy'' + y' = \frac{\ln x}{x}, \text{ con } y(1) = 0,\ y'(1) = 1\ \&\ y''(1) = -1.$$

▼ Primero multiplicamos la ecuación por x a fin de llevarla a una ecuación del tipo Cauchy-Euler:

$$x^3y^{(3)} - x^2y'' + xy' = \ln x.$$

Si hacemos ahora el cambio de variable $x = e^t$ e incorporamos los resultados (4.16), (4.17) y (4.18):

$$e^{3t}\left[e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)\right] - e^{2t}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] + e^t\left[e^{-t}\frac{dy}{dt}\right] = t.$$

Al simplificar, hallamos:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} = t,$$

o bien:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} = t.$$

Ésta es una ED con coeficientes constantes. La ecuación característica correspondiente a la ED homogénea asociada es

$$r^3 - 4r^2 + 4r = r(r^2 - 4r + 4) = r(r-2)^2 = 0.$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación son $r_1 = 0$ y $r_2 = r_3 = 2$. En consecuencia, las funciones que integran el conjunto fundamental de soluciones de la ED homogénea asociada son

$$\phi_1 = 1, \quad \phi_2 = e^{2t} \quad \& \quad \phi_3 = te^{2t}.$$

Con ellas podemos calcular el wronskiano $W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$:

$$W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \\ 0 & 4e^{2t} & (4t+4)e^{2t} \end{vmatrix} = (8t+8)e^{4t} - (8t+4)e^{4t} = 4e^{4t}.$$

De manera similar:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \\ t & 4e^{2t} & (4t+4)e^{2t} \end{vmatrix} = t[(2t+1)e^{4t} - 2te^{4t}] = te^{4t},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & te^{2t} \\ 0 & 0 & (2t+1)e^{2t} \\ 0 & t & (4t+4)e^{2t} \end{vmatrix} = -t(2t+1)e^{2t} = (-2t^2 - t)e^{2t},$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 4e^{2t} & t \end{vmatrix} = 2te^{2t}.$$

Así, por el método de variación de parámetros, las funciones incógnitas u_1, u_2, u_3:

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{W_1}{W}\,dt = \int \frac{te^{4t}}{4e^{4t}}\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{1}{8}t^2. \\ u_2 &= \int \frac{W_2}{W}\,dt = \int \frac{(-2t^2 - t)e^{2t}}{4e^{4t}}\,dt = -\frac{1}{4}\int (2t^2 + t)e^{-2t}\,dt. \end{aligned}$$

Si en la última integral aplicamos integración por partes, obtenemos:

$$u_2 = \frac{1}{16}e^{-2t}(3 + 6t + 4t^2).$$

Otra integración por partes nos da como resultado:

$$u_3 = \int \frac{W_3}{W}dt = \int \frac{2te^{2t}}{4e^{4t}}dt = \frac{1}{2}\int te^{-2t}dt = -\frac{1}{8}e^{-2t}(2t+1).$$

De $x = e^t$, obtenemos $y = \ln x$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned} y &= [c_1 + c_2e^{2t} + c_3te^{2t}] + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}e^{-2t}(3 + 6t + 4t^2)e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-2t}(2t+1)te^{2t} = \\ &= [c_1 + c_2e^{2t} + c_3te^{2t}] + \frac{1}{8}t^2 + \frac{3}{16} + \frac{3}{8}t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t = \\ &= [c_1 + c_2e^{2t} + c_3te^{2t}] + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{4}t. \end{aligned}$$

De $x = e^t$, obtenemos $t = \ln x$, por lo tanto, la solución general de la ED en la variable original x es

$$y = c_1 + c_2x^2 + c_3x^2\ln x + \frac{1}{8}\ln^2 x + \frac{1}{4}\ln x.$$

Ahora bien, de las condiciones iniciales:

$$y(1) = 0 \;\Rightarrow\; c_1 + c_2 = 0.$$

Para aplicar la segunda condición requerimos la primera derivada; ésta es

$$y' = 2c_2x + c_3[x + 2x\ln x] + \frac{1}{4}\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{4x}.$$

Por lo tanto, $y'(1) = 1$ produce:

$$1 = 2c_2 + c_3 + \frac{1}{4} \quad \text{o bien} \quad 2c_2 + c_3 = \frac{3}{4}.$$

Finalmente, para usar la tercera condición, requerimos la segunda derivada; al calcularla encontramos:

$$y'' = 2c_2 + c_3[3 + 2\ln x] + \frac{1}{4}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) - \frac{1}{4x^2}.$$

De donde, por la condición $y''(1) = -1$, hallamos:

$$-1 = 2c_2 + 3c_3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \quad \text{o bien} \quad -1 = 2c_2 + 3c_3.$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 0; \\ 2c_2 + c_3 & = \dfrac{3}{4}; \\ 2c_2 + 3c_3 & = -1. \end{cases}$$

Encontramos que $c_1 = -\dfrac{13}{16}$, $c_2 = \dfrac{13}{16}$ & $c_3 = -\dfrac{7}{8}$. Al utilizar estos valores en la solución general, hallamos la siguiente solución particular:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{13}{16} + \frac{13}{16}x^2 - \frac{7}{8}x^2\ln x + \frac{1}{8}\ln^2 x + \frac{1}{4}\ln x = \\ &= \frac{1}{16}[-13 + 13x^2 - 14x^2\ln x + 2\ln^2 x + 4\ln x]. \end{aligned}$$

□

Ejercicios 4.7.2 *Variación de parámetros para ED de orden n.* *Soluciones en la página 11*
Utilice el método de variación de parámetros o el correspondiente a la ED de Cauchy-Euler para determinar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y^{(3)} - y'' = 12x^2 + 6x$.
2. $y^{(4)} + y'' = x^2 + x$.
3. $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$.
4. $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = \dfrac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$.
5. $y''' = 2y'' + 1$.
6. $y^{(4)} + 16y'' = 64\cos 4x$.
7. $y^{(3)} - 4y'' + 4y' = 12e^{2x} + 24x^2$.
8. $y^{(4)} - 2y'' + y = 100\cos 3x$.
9. $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = e^x$.
10. $y^{(3)} = \dfrac{24(x+y)}{x^3}$.
11. $x^3y^{(3)} - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3$.
12. $x^3y^{(3)} + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = x^4$.
13. $x^3y^{(3)} - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 4\ln x$.
14. $x^3y^{(3)} + x^2y'' - 6xy' + 6y = 30x$.

15. $xy^{(3)} + 2xy'' - xy' - 2xy = 1$, si el conjunto fundamental de soluciones está integrado por $\phi_1 = e^x, \phi_2 = e^{-x}, \phi_3 = e^{-2x}$.

16. $x^2y^{(3)} - 2y' = 5\ln x$, si el conjunto fundamental de soluciones está integrado por $\phi_1 = 1, \phi_2 = \ln x$ & $\phi_3 = x^3$.

17. $y^{(3)} - y' = -2x$, con $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.

18. $y^{(4)} - y = 8e^x$, con $y(0) = -1$, $\quad y'(0) = 0$, $\quad y''(0) = 1$, $\quad y'''(0) = 0$.

19. $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 12e^{-x}$, con $y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 0$, $\quad y''(0) = -3$.

20. $y^{(4)} - y = \cos x$, con $y(0) = 1$, $\quad y'(0) = -1$, $\quad y''(0) = y'''(0) = 0$.

Ejercicios 4.7.2 *Variación de parámetros para ED de orden n.* Página 9

1. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2$.
2. $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} - x^2$.
3. $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} + \dfrac{1}{6} x^3 e^{-x}$.
4. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + \dfrac{1}{x}$.
5. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x + c_3 - \dfrac{1}{4} x^2$.
6. $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 4x + c_4 \operatorname{sen} 4x - \dfrac{1}{2} x \operatorname{sen} 4x$.
7. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 + 3x^2 e^{2x} + 2x^3 + 6x^2 + 9x$.
8. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} + \cos 3x$.
9. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + \dfrac{1}{2} x e^x$.
10. $y = c_1 x^4 + x^{-\frac{1}{2}} \left(c_2 \cos \dfrac{\sqrt{23}}{2} \ln x + c_3 \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{23}}{2} \ln x \right) - x$.
11. $y = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x^2 + \dfrac{x^3}{4}$.
12. $y = c_1 x + c_2 x^{-1} + c_3 x^{-2} + \dfrac{x^4}{90}$.
13. $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4 - \dfrac{1}{2} \ln x - \dfrac{7}{8}$.
14. $y = c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^{-2} - 5x \ln x$.
15. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} + \dfrac{e^x}{6} \displaystyle\int \dfrac{e^{-x}}{x}\, dx - \dfrac{e^{-x}}{2} \displaystyle\int \dfrac{e^x}{x}\, dx + \dfrac{e^{-2x}}{3} \displaystyle\int \dfrac{e^{2x}}{x}\, dx$.
16. $y = c_1 + c_2 \ln x + c_3 x^3 - \dfrac{5}{2} x \ln x + \dfrac{15}{4} x$.
17. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} + x^2 = \operatorname{senh} x + x^2$.
18. $y = e^{-x} - 3e^x + \cos x + 2 \operatorname{sen} x + 2x e^x$.
19. $y = e^{-x}(1 + x - x^2 + 2x^3)$.
20. $y = \dfrac{1}{8} e^x + \dfrac{5}{8} e^{-x} + \dfrac{1}{4} \cos x - \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{4} x \operatorname{sen} x$.