CAPÍTULO

4

Ecuaciones diferenciales de orden superior

4.8 Variación de parámetros y reducción de orden

Con lo anteriormente tratado hasta aquí, podemos hacer las afirmaciones siguientes:

1. Con el método de variación de parámetros podemos resolver la ED lineal no homogénea:

   $$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

   siempre y cuando conozcamos la solución general $\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$ de la ED lineal homogénea asociada $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

2. Con el método de variación de parámetros podemos resolver la ED lineal con coeficientes constantes

   $$ay'' + by' + cy = g(x).$$

3. Aplicando primero el método de reducción de orden y luego el método de variación de parámetros, podemos resolver la ED lineal

   $$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

   con el conocimiento de sólo una solución $y = \phi_1(x)$ de la ED lineal homogénea asociada

   $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Sobre las dos primeras afirmaciones ya hemos ejemplificado; y ahora lo haremos sobre la última afirmación.

Ejemplo 4.8.1 *Utilice el método de variación de parámetros; halle una solución particular y escriba la solución general de la ED*

$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^{2x},$$

considerando que $y_1 = x + 1$ *es solución de la ED homogénea asociada*

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0.$$

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

▼ Primero mediante reducción de orden, se obtiene otra solución y_2 de la homogénea asociada y luego se aplica variación de parámetros para determinar una solución particular.

Para obtener y_2, se propone $y_2 = uy_1$.

$$y_2 = (x+1)u \;\Rightarrow\; y_2' = (x+1)u' + u \;\Rightarrow\; y_2'' = (x+1)u'' + 2u'.$$

Sustituyendo en:

$$xy_2'' - (x+1)y_2' + y_2 = 0,$$

encontramos que

$$\begin{aligned} x[(x+1)u'' + 2u'] - (x+1)[(x+1)u' + u] + (x+1)u = 0 \;&\Rightarrow \\ \Rightarrow x(x+1)u'' + [2x - (x+1)^2]u' + [-(x+1) + (x+1)]u = 0 \;&\Rightarrow \\ \Rightarrow x(x+1)u'' - (x^2+1)u' = 0. \qquad (4.1)& \end{aligned}$$

Si $u' = w$, entonces $u'' = \dfrac{dw}{dx}$. Sustituyendo en (4.1) se tiene que

$$\begin{aligned} x(x+1)\frac{dw}{dx} - (x^2+1)w = 0 \;&\Rightarrow \\ \Rightarrow x(x+1)\frac{dw}{dx} = (x^2+1)w \;&\Rightarrow\; \frac{dw}{w} = \frac{x^2+1}{x(x+1)}\,dx \;\Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{dw}{w} = \int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx \;&\Rightarrow\; \ln w = \int \left[1 + \frac{-x+1}{x(x+1)}\right] dx \;\Rightarrow \\ \Rightarrow \ln w = x + \int \frac{-x+1}{x(x+1)}\,dx&. \end{aligned}$$

Integrando mediante fracciones parciales:

$$\ln w = x + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}\right) dx = x + \ln x - 2\ln(x+1) + C = x + \ln x + \ln(x+1)^{-2} + \ln C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \ln w = x + \ln[Cx(x+1)^{-2}] \;\Rightarrow\; w = e^x Cx(x+1)^{-2}.$$

Pero $w = u'$, entonces

$$u' = e^x Cx(x+1)^{-2} \;\Rightarrow\; u = C\int xe^x(x+1)^{-2}\,dx\,.$$

Integrando por partes:

$$u = C\left[-xe^x(x+1)^{-1} - \int -e^x\,dx\right] \;\Rightarrow\; u = C[-xe^x(x+1)^{-1} + e^x] + C_1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; u = Ce^x(x+1)^{-1} + C_1.$$

Tomando $u = e^x(x+1)^{-1}$, se obtiene como una segunda solución:

$$y_2 = (x+1)u = (x+1)e^x(x+1)^{-1} \;\Rightarrow\; y_2 = e^x.$$

Entonces, la solución general de la ED homogénea asociada es

$$y_c = c_1(x+1) + c_2e^x.$$

Ahora se aplica variación de parámetros proponiendo:

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2.$$

Con $y_1 = x+1$ y con $y_2 = e^x$:

$$y_p = (x+1)u_1 + e^xu_2 \;\Rightarrow\; y_p' = (x+1)u_1' + u_1 + e^xu_2' + e^xu_2.$$

Suponiendo que

$$(x+1)u_1' + e^x u_2' = 0, \tag{4.2}$$

se tiene:

$$y_p' = u_1 + e^x u_2 \quad \& \quad y_p'' = u_1' + e^x u_2' + e^x u_2.$$

Sustituyendo en:

$$xy_p'' - (x+1)y_p' + y_p = x^2 e^{2x},$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} x[u_1' + e^x u_2' + e^x u_2] - (x+1)[u_1 + e^x u_2] + (x+1)u_1 + e^x u_2 = x^2 e^{2x} \ \Rightarrow \\ \Rightarrow xu_1' + xe^x u_2' + [xe^x - (x+1)e^x + e^x]u_2 + [-(x+1) + (x+1)]u_1 = x^2 e^{2x} \ \Rightarrow \\ \Rightarrow xu_1' + xe^x u_2' = x^2 e^{2x}. \end{aligned}$$

Dividiendo entre x:

$$u_1' + e^x u_2' = xe^{2x}. \tag{4.3}$$

Entonces u_1' & u_2' deben satisfacer el sistema conformado por las ecuaciones (4.2) y (4.3).

$$\begin{aligned} (x+1)u_1' + e^x u_2' &= 0. \\ u_1' + e^x u_2' &= xe^{2x}. \end{aligned}$$

El determinante del sistema es

$$W = \begin{vmatrix} x+1 & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = (x+1)e^x - e^x = xe^x \ \Rightarrow \ W = xe^x.$$

La solución del sistema es

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ xe^{2x} & e^x \end{vmatrix}}{W} = \frac{-xe^{3x}}{xe^x} = -e^{2x};$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ 1 & xe^{2x} \end{vmatrix}}{W} = \frac{(x+1)xe^{2x}}{xe^x} = (x+1)e^x.$$

Integrando las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\int e^{2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{2x} + C; \\ u_2 &= \int (x+1)e^x\,dx = xe^x + C. \end{aligned}$$

Tomando $u_1 = -\frac{1}{2}e^{2x}$ & $u_2 = xe^x$ se tiene que una solución particular es

$$\begin{aligned} y_p = (x+1)u_1 + e^x u_2 = -\frac{1}{2}(x+1)e^{2x} + e^x xe^x = \\ = \left[-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + x\right]e^{2x} = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} \ \Rightarrow \ y_p = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general de la ED dada es

$$y = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} + c_1(x+1) + c_2 e^x.$$

□

Ejemplo 4.8.2 *Utilizando el método de variación de parámetros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ecuación diferencial ordinaria*

$$x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x),$$

considerando que $y_1 = \operatorname{sen}(\ln x)$ *es solución de la ED homogénea asociada*

$$x^2y'' + xy' + y = 0.$$

▼ Primero se aplica el método de reducción de orden para determinar otra solución y_2 de la ED homogénea asociada; luego se obtiene una solución particular de la ED no homogénea mediante variación de parámetros.

Para determinar y_2, se propone $y_2 = uy_1$.

$$y_2 = u\operatorname{sen}(\ln x) \Rightarrow y_2' = u'\operatorname{sen}(\ln x) + ux^{-1}\cos(\ln x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_2'' = u''\operatorname{sen}(\ln x) + 2u'x^{-1}\cos(\ln x) + ux^{-2}[-\cos(\ln x) - \operatorname{sen}(\ln x)].$$

Sustituyendo ahora:

$$x^2y_2'' + xy_2' + y_2 = 0;$$

con lo cual,

$$u''x^2\operatorname{sen}(\ln x) + u'x[2\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)] = 0.$$

Dividiendo entre $x^2\operatorname{sen}(\ln x)$:

$$u'' + u'\frac{1}{x}\left[2\frac{\cos(\ln x)}{\operatorname{sen}(\ln x)} + 1\right] = 0. \tag{4.4}$$

Si $u' = w$, entonces $u'' = \dfrac{dw}{dx}$. Integrando lo anterior a (4.4):

$$\frac{dw}{dx} = \left[-2\frac{\cos(\ln x)}{\operatorname{sen}(\ln x)}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right]w \Rightarrow \int\frac{dw}{w} = -2\int\frac{\cos(\ln x)}{\operatorname{sen}(\ln x)}\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln w = -2\ln[\operatorname{sen}(\ln x)] - \ln x + C \Rightarrow \ln w = \ln[\operatorname{sen}(\ln x)]^{-2} + \ln x^{-1} + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln w = \ln Cx^{-1}[\operatorname{sen}(\ln x)]^{-2} \Rightarrow w = Cx^{-1}[\operatorname{sen}(\ln x)]^{-2} = \frac{C}{x}\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\ln x)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow w = \frac{C}{x}\csc^2(\ln x).$$

pero $w = u'$, entonces:

$$u = C\int\csc^2(\ln x)\frac{dx}{x} = -C\cot(\ln x) + C_1;$$

tomando $u = \cot(\ln x)$, se tiene que

$$y_2 = [\cot(\ln x)]\operatorname{sen}(\ln x) = \frac{\cos(\ln x)}{\cancel{\operatorname{sen}(\ln x)}}\cancel{\operatorname{sen}(\ln x)} \Rightarrow y_2 = \cos(\ln x).$$

Luego, la solución general de la ED homogénea asociada es

$$y_c = c_1\operatorname{sen}(\ln x) + c_2\cos(\ln x).$$

Ahora se aplica variación de parámetros; se propone:

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2,$$

con $y_1 = \operatorname{sen}(\ln x)$ y $y_2 = \cos(\ln x)$; por lo tanto:

$$y_p = u_1\operatorname{sen}(\ln x) + u_2\cos(\ln x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_p' = u_1'\operatorname{sen}(\ln x) + u_1x^{-1}\cos(\ln x) + u_2'\cos(\ln x) - u_2x^{-1}\operatorname{sen}(\ln x).$$

Considerando que

$$u_1' \operatorname{sen}(\ln x) + u_2' \cos(\ln x) = 0, \tag{4.5}$$

se tiene:

$$y_p' = u_1 x^{-1} \cos(\ln x) - u_2 x^{-1} \operatorname{sen}(\ln x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_p'' = u_1' x^{-1} \cos(\ln x) - u_1 x^{-2}[\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)] - u_2' x^{-1} \operatorname{sen}(\ln x) - u_2 x^{-2}[\cos(\ln x) - \operatorname{sen}(\ln x)].$$

Sustituyendo en la ED normalizada

$$y_p'' + \frac{1}{x} y_p' + \frac{1}{x^2} y_p = \frac{1}{x^2} \sec(\ln x),$$

encontramos:

$$u_1' \frac{1}{x} \cos(\ln x) - u_2' \frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x) = \frac{1}{x^2} \sec(\ln x). \tag{4.6}$$

Entonces u_1' & u_2' satisfacen el sistema conformado por las ecuaciones (4.5) y (4.6).

$$\begin{cases} u_1' \operatorname{sen}(\ln x) + u_2' \cos(\ln x) & = 0. \\ u_1' \dfrac{1}{x} \cos(\ln x) - u_2' \dfrac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x) & = \dfrac{1}{x^2} \sec(\ln x). \end{cases}$$

El determinante del sistema es

$$W = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\ln x) & \cos(\ln x) \\ \dfrac{1}{x} \cos(\ln x) & -\dfrac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} \operatorname{sen}^2(\ln x) - \frac{1}{x} \cos^2(\ln x) = -\frac{1}{x}[\operatorname{sen}^2(\ln x) + \cos^2(\ln x)] = -\frac{1}{x}.$$

La solución del sistema es

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos(\ln x) \\ \dfrac{1}{x^2} \sec(\ln x) & -\dfrac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x) \end{vmatrix}}{W} = \frac{-\dfrac{1}{x^2} \sec(\ln x) \cos(\ln x)}{-\dfrac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\ln x) & 0 \\ \dfrac{1}{x} \cos(\ln x) & \dfrac{1}{x^2} \sec(\ln x) \end{vmatrix}}{W} = \frac{\dfrac{1}{x^2} \operatorname{sen}(\ln x) \sec(\ln x)}{-\dfrac{1}{x}} = -\frac{1}{x} \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{\cos(\ln x)}.$$

De aquí que

$$u_1 = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$
$$u_2 = \int \frac{-\operatorname{sen}(\ln x)}{\cos(\ln x)} \frac{dx}{x} = \ln[\cos(\ln x)] + C.$$

Tomando $u_1 = \ln x$ & $u_2 = \ln[\cos(\ln x)]$, se tiene por solución particular:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \Rightarrow y_p = (\ln x) \operatorname{sen}(\ln x) + \ln[\cos(\ln x)] \cos(\ln x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_p = (\ln x) \operatorname{sen}(\ln x) + [\cos(\ln x)] \ln[\cos(\ln x)].$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow y = (\ln x) \operatorname{sen}(\ln x) + [\cos(\ln x)] \ln[\cos(\ln x)] + c_1 \operatorname{sen}(\ln x) + c_2 \cos(\ln x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = [\ln x + c_1] \operatorname{sen}(\ln x) + (\ln[\cos(\ln x)] + c_2) \cos(\ln x).$$

□

Ejercicios 4.8.1 *Variación de parámetros y reducción de orden.* *Soluciones en la página 7*
Obtener la solución general de la ecuación diferencial dada, considerando que y_1 es una solución de la ED homogénea asociada.

1. $x^2y'' - xy' + y = 2x; \quad y_1 = x$.
2. $5x^2y'' - 3xy' + 3y = \sqrt{x}; \quad y_1 = x^{\frac{3}{5}}$.
3. $x^2y'' - xy' + y = \ln x; \quad y_1 = x$.
4. $x^2y'' - xy' - 3y = -\dfrac{16\ln x}{x}; \quad y_1 = x^3$.
5. $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x; \quad y_1 = x\cos(\ln x)$.

Ejercicios 4.8.1 *Variación de parámetros y reducción de orden.* *Página 6*

1. $y = c_1 x + c_2 x \ln x + x \ln^2 x$.
2. $y = c_1 x^{\frac{3}{5}} + c_2 x + 4\sqrt{x}$.
3. $y = c_1 x + c_2 x \ln x + \ln x + 2$.
4. $y = c_1 x^3 + c_2 x^{-1} + \dfrac{\ln x + 2\ln^2 x}{x}$.
5. $y = c_1 x \cos(\ln x) + c_2 x \operatorname{sen}(\ln x) + x \ln x$.