CAPÍTULO

4

Ecuaciones diferenciales de orden superior

4.2 Reducción de orden

Hallar un método para encontrar soluciones que formen un conjunto fundamental de la ED será nuestro trabajo en las siguientes secciones.

4.2.1 Reducción de orden en ED lineales de segundo orden

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

de la cual se conoce una solución que llamaremos y_1. De acuerdo con lo visto en la sección anterior, requerimos una segunda solución y_2 de la ecuación diferencial de tal manera que el conjunto $\{ y_1, y_2 \}$ constituya un conjunto fundamental de soluciones.
A fin de encontrar esta segunda solución, aplicaremos un método llamado variación de parámetros que se debe a D'Alembert.
La idea fundamental es la siguiente: debido a que la ecuación es lineal, y dado que y_1 es solución, entonces ay_1 para a constante, también es solución. La pregunta que se formula en este método es ¿cómo encontrar una función u, de tal manera que $y_2 = uy_1$ también sea solución de la ecuación?
Para el desarrollo de la idea de D'Alembert, requerimos, en primer lugar, normalizar la ecuación; esto es, necesitamos que el coeficiente de y'' sea 1. Para ello, dividimos la ecuación entre $a_2(x)$:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \text{ donde } p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ y donde } q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}, \text{ con } a_2(x) \neq 0.$$

Queremos ahora determinar bajo qué condiciones podemos asegurar que $y_2 = uy_1$ es solución. Constatamos que, por ser y_1 solución de la ED, tenemos:

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0.$$

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

Si derivamos y_2 dos veces, hallamos:

$$\begin{aligned} y_2 &= uy_1. \\ y_2' &= uy_1' + u'y_1. \\ y_2'' &= uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ED $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$, obtenemos:

$$\underbrace{uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1}_{y_2''} + \underbrace{puy_1' + pu'y_1}_{py_2'} + \underbrace{qy_1u}_{qy_2} = 0.$$

Reagrupamos en términos de u, u', u'' y así resulta:

$$\underbrace{u\,(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{L(y_1)=0} + y_1u'' + 2y_1'u' + py_1u' = 0 \;\Rightarrow\; y_1u'' + 2y_1'u' + py_1u' = 0.$$

Si hacemos el cambio de variable $w = u'$, se tiene $u'' = w'$, por lo que la ED se reduce a otra de orden uno, concretamente:

$$y_1w' + 2y_1'w + py_1w = 0 \;\Rightarrow\; y_1\frac{dw}{dx} + 2y_1'w + py_1w = 0.$$

Si escribimos ahora la ecuación en forma diferencial, hallaremos:

$$y_1dw + 2y_1'wdx + py_1wdx = 0.$$

Esta última expresión es una ED que puede resolverse mediante separación de variables. En efecto, multiplicando por $\dfrac{1}{wy_1}$, tenemos:

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + pdx = 0.$$

Integrando, encontramos:

$$\int \frac{dw}{w} + 2\int \frac{y_1'}{y_1}dx + \int pdx = C \;\Rightarrow\; \ln w + 2\ln y_1 + \int pdx = C.$$

Aplicando propiedades de logaritmos encontramos:

$$\ln(y_1^2w) + \int pdx = C \;\Rightarrow\; \ln(y_1^2w) = C - \int pdx.$$

Si ahora aplicamos la función exponencial,

$$y_1^2w = e^{C-\int pdx} = e^Ce^{-\int pdx} = Ce^{-\int pdx}.$$

Así,

$$w = \frac{du}{dx} = C\frac{e^{-\int pdx}}{y_1^2} \;\Rightarrow\; u = C\int \frac{e^{-\int pdx}}{y_1^2}dx + K.$$

De esta manera, cualesquiera de las funciones $u \neq 0$ que resulten de esta fórmula será de utilidad para construir una segunda solución $y_2 = uy_1$. Como

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & uy_1 \\ y_1' & uy_1' + u'y_1 \end{vmatrix} = \cancel{uy_1y_1'} + u'y_1^2 - \cancel{uy_1y_1'} = u'y_1^2 = \\ &= C\frac{e^{-\int pdx}}{\cancel{y_1^2}}(\cancel{y_1^2}) = Ce^{-\int pdx} \neq 0, \end{aligned}$$

resulta que $\{ y_1, y_2 \}$ es un conjunto fundamental de soluciones. Tomamos el caso más sencillo para la función u, esto es $C = 1$ y $K = 0$; u toma la forma de

$$u = \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx.$$

En resumen, tenemos el siguiente resultado:.

- Dada la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.1}$$

y una solución no nula y_1, entonces:

1. La función $y_2 = uy_1$, donde
$$u = \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx,$$
es también solución y, además, $\{ y_1, y_2 \}$ conforma un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial.
2. La solución general de la ED (4.1) está dada por:
$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Ejemplo 4.2.1 *Consideremos la ED lineal homogénea de segundo orden* $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$.

1. *Verificar que* $y_1 = x^2$ *es una solución de la ED.*
2. *Encontrar una segunda solución* y_2 *de la ecuación.*
3. *Escribir la solución general de la ecuación.*

▼

1. En primer lugar calculamos la primera y segunda derivada de y_1:
$$y_1 = x^2 \;\Rightarrow\; y_1' = 2x \quad \& \quad y_1'' = 2.$$
Si sustituimos en la ecuación diferencial:
$$x^2 \underbrace{(2)}_{y_1''} + 2x \underbrace{(2x)}_{y_1'} - 6 \underbrace{(x^2)}_{y_1} = 0 \;\Rightarrow\; 6x^2 - 6x^2 = 0,$$
concluimos que y_1 es una solución de la ecuación diferencial.
2. Usamos ahora el resultado anterior. Determinamos u.
Primero necesitamos normalizar la ecuación para lo cual dividimos entre x^2. Obtenemos:
$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{6}{x^2}y = 0.$$
Usamos la fórmula del resultado anterior con $p = \dfrac{2}{x}$ & $y_1 = x^2$; encontramos:
$$u = \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}dx}}{(x^2)^2} dx = \int \frac{e^{-2\ln x}}{x^4} dx = \int \frac{e^{\ln(x^{-2})}}{x^4} dx = \int \frac{x^{-2}}{x^4} dx = \int x^{-6} dx = -\frac{1}{5}x^{-5}.$$
Por lo tanto, $y_2 = uy_1 = -\dfrac{1}{5}x^{-5} \cdot x^2 = -\dfrac{1}{5}x^{-3}$.

3. La solución general es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x^2 + c_2 \left(-\frac{1}{5}x^{-3}\right) = c_1 x^2 + c_2 x^{-3}.$$

□

Ejemplo 4.2.2 *Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la ED dada y escribir su solución general.*

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0; \qquad y_1(x) = x.$$

▼ Vamos a usar dos procedimientos.

1. Procedimiento 1: uso de la fórmula.

   Primero, normalizamos la ED; para ello, dividimos entre x^2:

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0.$$

   Usamos ahora la fórmula de esta sección con $p = \dfrac{2}{x}$ & $y_1 = x$; encontramos:

$$u = \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}\,dx}}{x^2}\,dx = \int \frac{e^{-2\ln x}}{x^2}\,dx = \int \frac{e^{\ln(x^{-2})}}{x^2}\,dx = \int \frac{x^{-2}}{x^2}\,dx = \int x^{-4}\,dx = -\frac{1}{3}x^{-3}.$$

   Por lo tanto,

$$y_2 = uy_1 = -\frac{1}{3}x^{-3}x = -\frac{1}{3}x^{-2}.$$

   Así, la solución general de la ED es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-2}.$$

   O bien

$$y = c_1 x + c_2 x^{-2}.$$

2. Procedimiento 2: sustitución de $y_2 = u(x)y_1(x)$.

   Si $y_2 = ux$, entonces:

$$y_2' = u'x + u \quad \& \quad y_2'' = u''x + 2u'.$$

   Sustituimos en la ED para garantizar que $y_2 = uy_1$ sea solución:

$$x^2 y_2'' + 2xy_2' - 2y_2 = 0.$$

   Se debe cumplir:

$$\begin{aligned} x^2(u''x + 2u') + 2x(u'x + u) - 2(ux) = 0 \;&\Rightarrow \\ \Rightarrow\; x^3u'' + 2x^2u' + 2x^2u' + \cancel{2xu} - \cancel{2xu} = 0 \;&\Rightarrow \\ \Rightarrow\; x^3u'' + 4x^2u' = 0.& \end{aligned}$$

   Dividiendo entre x^3:

$$u'' + \frac{4}{x}u' = 0. \tag{4.2}$$

Si $u' = w$, entonces $u'' = \dfrac{dw}{dx}$. Sustituyendo en (4.2) se tiene que

$$\frac{dw}{dx} + \frac{4}{x}w = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dx} = -\frac{4}{x}w \Rightarrow \frac{dw}{w} = -4\frac{dx}{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{dw}{w} = -4\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln w = -4\ln x + C_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln w = \ln x^{-4} + \ln C_1 = \ln(C_1 x^{-4}) \Rightarrow w = C_1 x^{-4}.$$

Pero

$$w = u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} = C_1 x^{-4} \Rightarrow u = C_1 \int x^{-4}\,dx = C_1 \frac{x^{-3}}{-3} + C_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = \frac{C_1}{-3}x^{-3} + C_2 \Rightarrow u = C_1 x^{-3} + C_2.$$

Si tomamos $C_1 = 1$ & $C_2 = 0$, obtenemos que $u = x^{-3}$.
Pero $y_2(x) = ux$, por lo tanto:

$$y_2(x) = x^{-3}x = x^{-2} \Rightarrow y_2(x) = x^{-2}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, es

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \Rightarrow y = c_1x + c_2x^{-2}.$$

□

Ejemplo 4.2.3 *Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la ED proporcionada y escribir su solución general.*

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0; \qquad y_1(x) = x^{-1}.$$

▼ Si $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, entonces:

$$y_2 = ux^{-1};$$
$$y_2' = u'x^{-1} - ux^{-2};$$
$$y_2'' = u''x^{-1} - 2u'x^{-2} + 2ux^{-3}.$$

Sustituyendo en la ED $x^2y_2'' + 3xy_2' + y_2 = 0$, se obtiene:

$$x^2(u''x^{-1} - 2u'x^{-2} + 2ux^{-3}) + 3x(u'x^{-1} - ux^{-2}) + ux^{-1} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u''x - 2u' + 2ux^{-1} + 3u' - 3ux^{-1} + ux^{-1} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u''x + u' = 0.$$

Dividiendo entre x para normalizar la ED:

$$u'' + \frac{1}{x}u' = 0. \tag{4.3}$$

Si $u' = w$, entonces $u'' = \dfrac{dw}{dx}$; sustituyendo en (4.3) se tiene que

$$\frac{dw}{dx} + \frac{1}{x}w = 0 \Rightarrow \frac{dw}{w} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{dw}{w} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln w = -\ln x + C_1 = \ln x^{-1} + \ln C_1 = \ln(C_1x^{-1}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow w = C_1x^{-1}.$$

Pero $w = u' = \dfrac{du}{dx}$, por lo que

$$\frac{du}{dx} = C_1 x^{-1} \;\Rightarrow\; u = C_1 \int x^{-1}\,dx = C_1 \int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; u = C_1 \ln x + C_2.$$

Si tomamos, por ejemplo, $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, hallamos que $u = \ln x$. Ya que $y_2(x) = ux^{-1}$, entonces $y_2 = \dfrac{\ln x}{x}$.

Por lo tanto, la solución general de la ED:

$$y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-1} \ln x.$$

□

Ejemplo 4.2.4 *Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la ED dada y escribir su solución general.*

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0; \qquad y_1(x) = e^{-2x}.$$

▼ Si $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, entonces:

$$\begin{aligned} y_2 &= ue^{-2x};\\ y_2' &= u'e^{-2x} - 2ue^{-2x} = (u' - 2u)e^{-2x};\\ y_2'' &= u''e^{-2x} - 4u'e^{-2x} + 4ue^{-2x} = (u'' - 4u' + 4u)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en

$$(2x+1)y_2'' + 4xy_2' - 4y_2 = 0,$$

se obtiene

$$(2x+1)(u'' - 4u' + 4u)e^{-2x} + 4x(u' - 2u)e^{-2x} - 4ue^{-2x} = 0.$$

Multiplicando por e^{2x} se tiene que

$$\begin{aligned} &(2x+1)(u'' - 4u' + 4u) + 4x(u' - 2u) - 4u = 0 \;\Rightarrow\\ \Rightarrow\; &(2x+1)u'' + (-8x - 4 + 4x)u' + (8x + 4 - 8x - 4)u = 0 \;\Rightarrow\\ \Rightarrow\; &(2x+1)u'' + (-4x - 4)u' = 0. \end{aligned}$$

Dividiendo entre $(2x+1)$ para normalizar:

$$u'' - \frac{4x+4}{2x+1}u' = 0. \tag{4.4}$$

Si $u' = w$, entonces $u'' = \dfrac{dw}{dx}$. Sustituyendo en (4.4):

$$\begin{aligned} &\frac{dw}{dx} - \frac{4x+4}{2x+1}w = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dw}{w} = \frac{4x+4}{2x+1}\,dx \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow \int \frac{dw}{w} = \int \left(2 + \frac{2}{2x+1}\right) dx \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow \ln w = 2x + \ln(2x+1) + C_1 \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow w = e^{2x}e^{\ln(2x+1)}e^{C_1} = e^{2x}(2x+1)C_1 \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow w = C_1(2x+1)e^{2x}, \text{ pero } w = \frac{du}{dx} \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow u = C_1 \int (2x+1)e^{2x}\,dx. \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= 2x+1 \;\Rightarrow\; & dt &= 2\,dx;\\ dv &= e^{2x}\,dx \;\Rightarrow\; & v &= \frac{1}{2}e^{2x}. \end{aligned}}$$

Aplicando integración por partes:

$$u = C_1\left[\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x} - \int e^{2x}\,dx\right] \;\Rightarrow\; u = C_1 x e^{2x} + C_2.$$

Tomando $C_1 = 1$ & $C_2 = 0$, hallamos que $y_2(x) = ue^{-2x} = xe^{2x}\cdot e^{-2x} = x$. Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-2x} + c_2x.$$

□

Ejemplo 4.2.5 *Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la ED conocida y escribir su solución general.*

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0; \qquad y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen} x.$$

▼ Si $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, entonces:

$$y_2 = ux^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen} x;$$
$$y_2' = u'x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen} x + u\left(x^{-\frac{1}{2}}\cos x - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\operatorname{sen} x\right);$$
$$y_2'' = u''x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen} x + 2u'\left(x^{-\frac{1}{2}}\cos x - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\operatorname{sen} x\right) + u\left(-x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen} x - x^{-\frac{3}{2}}\cos x + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}\operatorname{sen} x\right).$$

Sustituyendo en $x^2y_2'' + xy_2' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y_2 = 0$, se obtiene, después de algunas operaciones:

$$u''x^{\frac{3}{2}}\operatorname{sen} x + 2u'x^{\frac{3}{2}}\cos x = 0.$$

De donde, dividiendo entre $x^{\frac{3}{2}}$:

$$u''\operatorname{sen} x + 2u'\cos x = 0. \tag{4.5}$$

Si $u' = w$, entonces $u'' = \dfrac{dw}{dx}$. Sustituyendo en (4.5) se tiene que

$$\frac{dw}{dx}\operatorname{sen} x + 2w\cos x = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dw}{dx}\operatorname{sen} x = -2w\cos x \;\Rightarrow\; \frac{dw}{w} = -2\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\frac{dw}{w} = -2\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln w = -2\ln(\operatorname{sen} x) + C_1 = \ln(\operatorname{sen} x)^{-2} + \ln C_1 = \ln\left[C_1(\operatorname{sen} x)^{-2}\right] \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow w = C_1(\operatorname{sen} x)^{-2}.$$

Pero $w = u' = \dfrac{du}{dx}$, por lo tanto:

$$\frac{du}{dx} = C_1\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = C_1\csc^2 x \;\Rightarrow u = C_1\int\csc^2 x\,dx = C_1(-\cot x) + C_2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = -C_1\cot x + C_2 \;\Rightarrow\; u = C_1\cot x + C_2.$$

Si se toma $C_1 = 1$ & $C_2 = 0$, obtenemos $u = \cot x$, con lo que:

$$y_2 = ux^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen} x = (\cot x)x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen} x = \frac{\cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x}}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)\cancel{\operatorname{sen} x} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y_2 = x^{-\frac{1}{2}}\cos x.$$

Por lo tanto la solución general de la ED

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0,$$

está dada por

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen} x + c_2x^{-\frac{1}{2}}\cos x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y(x) = x^{-\frac{1}{2}}(c_1\operatorname{sen} x + c_2\cos x).$$

□

Ejercicios 4.2.1 *Reducción de orden.* *Soluciones en la página 9*
Obtener la solución general de la ED conocida, considerando que y_1 es una solución de ella.

1. $2y'' + 3y' - 2y = 0$; $\quad y_1 = e^{-2x}$. .
2. $4y'' - 12y' + 9y = 0$; $\quad y_1 = e^{\frac{3x}{2}}$. .
3. $y'' + 4y = 0$; $\quad y_1 = \operatorname{sen} 2x$. .
4. $y'' + 6y' + 9y = 0$; $\quad y_1 = e^{-3x}$. .
5. $y'' + 4y' + 13y = 0$; $\quad y_1 = e^{-2x}\cos 3x$. .
6. $9y'' - 4y = 0$; $\quad y_1 = e^{\frac{2x}{3}}$. .
7. $x^2y'' - 6xy' + 10y = 0$; $\quad y_1 = x^2$. .
8. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$; $\quad y_1 = \dfrac{1}{x}$. .
9. $x^2y'' + 8xy' + 12y = 0$; $\quad y_1 = x^{-3}$. .
10. $-x^2y'' + xy' + 8y = 0$; $\quad y_1 = x^4$. .
11. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$; $\quad y_1 = x$. .
12. $xy'' + 2y' + xy = 0$; $\quad y_1 = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. .
13. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$; $\quad y_1 = x$. .
14. $xy'' + (x - 1)y' - y = 0$; $\quad y_1 = e^{-x}$. .
15. $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$; $\quad y_1 = e^x$. .

Ejercicios 4.2.1 *Reducción de orden.* *Página 8*

1. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{x}{2}}$.
2. $y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{3x}{2}}$.
3. $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$.
4. $y = (c_1 + c_2 x) e^{-3x}$.
5. $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$.
6. $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^{-\frac{2}{3}x}$.
7. $y = c_1 x^2 + c_2 x^5$.
8. $y = \dfrac{c_1}{x} + c_2 x^3$.
9. $y = \dfrac{c_1}{x^3} + \dfrac{c_2}{x^4}$.
10. $y = c_1 x^4 + \dfrac{c_2}{x^2}$.
11. $y = c_1 x + c_2 e^x$.
12. $y = \dfrac{1}{x}(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x)$.
13. $y = c_1 x + c_2 \ln x$.
14. $y = c_1 e^{-x} + c_2 (x - 1)$.
15. $y = e^x (c_1 + c_2 x^2)$.