CAPÍTULO

4

Ecuaciones diferenciales de orden superior

4.5 Obtención de una ecuación diferencial

Hasta ahora el problema tratado ha sido:

- Obtener la solución general de una ED lineal homogénea con coeficientes constantes.

En esta sección trataremos con el problema inverso:

- Obtener una ED lineal homogénea de coeficientes constantes a partir de su solución general.

Para obtener la solución general de una ED lineal homogénea con coeficientes constantes, recuérdese que tuvimos que llevar a cabo los pasos siguientes:

1. Proponer como solución a una función exponencial.
2. Obtener la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial.
3. Calcular las raíces de la ecuación.
4. Identificar un conjunto fundamental de soluciones
5. Finalmente escribir la solución general.

Por otro lado, para el problema inverso de obtener una ED lineal homogénea de coeficientes constantes, a partir de su solución general, es de imaginarse que hay que llevar a cabo los pasos anteriormente mencionados, pero en sentido opuesto. Esto es, dada la solución general de una ecuación diferencial:

1. Identificar un conjunto fundamental de soluciones.
2. Ubicar las raíces del polinomio característico.
3. Escribir el polinomio auxiliar o bien la ecuación auxiliar.
4. Y finalmente proponer una ecuación diferencial.

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

Ejemplo 4.5.1 *Obtener una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga por solución general a* $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}$.

▼ De la solución general $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}$, podemos considerar:

1. Que las funciones $y_1 = e^{2x}$ & $y_2 = e^{-5x}$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial buscada.
2. $y_1 = e^{2x} = e^{rx} \Rightarrow r = 2$ es una raíz de multiplicidad 1 & $(r - 2)$ es un factor de la ecuación característica.

   $y_2 = e^{-5x} = e^{rx} \Rightarrow r = -5$ es una raíz de multiplicidad 1 & $(r + 5)$ es un factor de la ecuación característica.
3. Entonces, una ecuación que puede ser considerada como la ecuación característica de la ecuación diferencial es
$$(r - 2)(r + 5) = 0 \Rightarrow r^2 + 3r - 10 = 0.$$
4. Por lo que, una posible ecuación diferencial es $y'' + 3y' - 10y = 0$.

□

Ejemplo 4.5.2 *Determinar una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga por solución general a* $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$.

▼ De la solución general $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$, podemos considerar:

1. Que un conjunto fundamental de soluciones está formado por las funciones $y_1 = e^{3x}$ & $y_2 = xe^{3x}$.
2. Con $y_1 = e^{3x} = e^{rx}$ & $y_2 = xe^{3x} = xe^{rx}$, podemos decir que $r = 3$ es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio característico.
3. Este polinomio puede ser considerado como $P(r) = (r - 3)^2$, el cual genera la ecuación característica
$$(r - 3)^2 = 0 \Rightarrow r^2 - 6r + 9 = 0.$$
4. Por lo cual, una posible ecuación diferencial es $y'' - 6y' + 9y = 0$.

□

Ejemplo 4.5.3 *Obtener una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga por solución general* $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$.

▼ La solución general puede ser expresada como
$$y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) = c_1e^{-x} \cos 2x + c_2e^{-x} \operatorname{sen} 2x.$$

1. Podemos considerar que $y_1 = e^{-x} \cos 2x$ & $y_2 = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$ son funciones que forman un conjunto fundamental de soluciones.
2. De aquí podemos decir que las raíces (complejas conjugadas) del polinomio característico están dadas por $r = -1 \pm 2i$, ambas de multiplicidad uno.
3. Una ecuación característica es
$$\begin{aligned} &r = -1 \pm 2i \Rightarrow r + 1 = \pm 2i \Rightarrow (r + 1)^2 = 4i^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r^2 + 2r + 1 = 4(-1) \Rightarrow r^2 + 2r + 1 + 4 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r^2 + 2r + 5 = 0. \end{aligned}$$
4. Por lo tanto, una posible ecuación diferencial es $y'' + 2y' + 5y = 0$.

□

Ejemplo 4.5.4 *Determinar una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga por solución general a* $y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-4x}$.

▼ La solución general puede ser expresada como

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-4x}.$$

1. Podemos considerar que $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ & $y_3 = e^{-4x}$ son funciones que forman un conjunto fundamental de soluciones.

2. Con $y_1 = e^x = e^{rx}$ & $y_2 = xe^x = xe^{rx}$, podemos decir que $r = 1$ es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio característico y que $(r-1)^2$ es un factor de éste.

   Con $y_3 = e^{-4x} = e^{rx}$ se puede afirmar que $r = -4$ es una raíz de multiplicidad 1 y que $(r+4)$ es un factor del polinomio característico.

3. Dicho polinomio puede ser escrito como

$$P(r) = (r-1)^2(r+4) = (r^2 - 2r + 1)(r+4) = r^3 + 2r^2 - 7r + 4.$$

   Una ecuación característica es

$$r^3 + 2r^2 - 7r + 4 = 0.$$

4. Una posible ecuación diferencial es

$$y''' + 2y'' - 7y' + 4y = 0.$$

□

También se puede obtener una ecuación diferencial a partir del conocimiento de las raíces del polinomio característico, junto con sus multiplicidades.

Ejemplo 4.5.5 *Obtener una ED lineal homogénea con coeficientes constantes, cuyo polinomio característico tiene por raíces* $r = \pm 1$ & $r = \pm i$*, todas de multiplicidad* 1.

▼

1. Por ser $r = 1$ y $r = -1$ raíces de multiplicidad 1, dos soluciones de la ecuación diferencial son $y_1 = e^x$ & $y_2 = e^{-x}$, y dos factores del polinomio característico son $(r-1)$ y $(r+1)$.

   Por ser $r = \pm i = 0 \pm 1i$ raíces complejas conjugadas de multiplicidad 1, dos soluciones de la ecuación diferencial son $y_3 = e^{0x}\cos x = \cos x$ & $y_4 = e^{0x}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$; además dos factores del polinomio característico son $(r - i)$ y $(r + i)$.

2. El polinomio característico es

$$P(r) = (r-1)(r+1)(r-i)(r+i) = (r^2-1)(r^2-i^2) = (r^2-1)(r^2+1) = r^4 - 1.$$

   Una ecuación característica es $r^4 - 1 = 0$.

3. Una posible ecuación diferencial es

$$y^{(4)} - y = 0.$$

La solución general de esta ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x.$$

□

Ejemplo 4.5.6 *Determinar una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes, cuyo polinomio característico tiene las siguientes raíces:*
$r = 0$ *de multiplicidad* 3; $r = \dfrac{2}{3}$ *de multiplicidad* 2; $r = -\dfrac{3}{2}$ *de multiplicidad* 1.

▼

1. Por ser $r = 0$ una raíz de multiplicidad 3, se tiene que tres soluciones de la ecuación diferencial son $e^{0x} = 1, xe^{0x} = x$ & $x^2e^{0x} = x^2$; y además un factor del polinomio característico es $(r - 0)^3 = r^3$.

   Por ser $r = \dfrac{2}{3}$ una raíz de multiplicidad 2, se tiene que dos soluciones de la ecuación diferencial son $e^{\frac{2}{3}x}$ & $xe^{\frac{2}{3}x}$; y un factor del polinomio característico es $\left(r - \dfrac{2}{3}\right)^2$ o bien $(3r - 2)^2$.

   Por ser $r = -\dfrac{3}{2}$ una raíz de multiplicidad 1, se tiene que una solución de la ecuación diferencial es $e^{-\frac{3}{2}x}$; y un factor del polinomio característico es $\left(r + \dfrac{3}{2}\right)$ o bien $(2r + 3)$.

2. El polinomio característico es
$$P(r) = r^3(3r - 2)^2(2r + 3) = r^3(9r^2 - 12r + 4)(2r + 3) = 18r^6 + 3r^5 - 28r^4 + 12r^3.$$
   Una ecuación característica es
$$18r^6 + 3r^5 - 28r^4 + 12r^3 = 0.$$

3. Una posible ecuación diferencial es
$$18y^{(6)} + 3y^{(5)} - 28y^{(4)} + 12y^{(3)} = 0.$$

La solución general de la ecuación diferencial es
$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + (c_4 + c_5x)e^{\frac{2}{3}x} + c_6e^{-\frac{3}{2}x}.$$

□

Ejemplo 4.5.7 *Determinar una ED lineal homogénea con coeficientes constantes, que tenga como solución a la función* $f(x) = x^2e^{-x}$.

▼ La función $f(x) = x^2e^{-x}$ está asociada con la raíz $r = -1$ de multiplicidad 3. Es decir, un factor del polinomio característico es
$$(r + 1)^3 = r^3 + 3r^2 + 3r + 1.$$
Una posible ED que tiene a este polinomio auxiliar es
$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$
La solución general de esta ED es
$$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}.$$
Es decir, la ED que hemos encontrado también tiene como solución las funciones $y_1 = e^{-x}$ & $y_2 = xe^{-x}$.

□

Ejercicios 4.5.1 *Obtención de una ecuación diferencial.* *Soluciones en la página 6*
Obtener una ED lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga por solución general:

1. $y = c_1e^{-6x} + c_2e^{5x}$.

2. $y = (c_1 + c_2x)e^{-8x}$.
3. $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$.
4. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x}$.
5. $y = c_1 + c_2x + e^{-x}(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x)$.
6. $y = c_1e^{-\frac{x}{2}} + c_2e^{\frac{x}{3}} + c_3xe^{\frac{x}{3}}$.
7. $y = (c_1 + c_2x) \cos 2x + (c_3 + c_4x) \operatorname{sen} 2x$.
8. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + (c_4 + c_5x + c_6x^2)e^{x}$.

Obtener una ED lineal homogénea con coeficientes constantes cuyo polinomio característico tenga por raíces:

9. $r = 2$ de multiplicidad 3 & $r = -3$ de multiplicidad 2.
10. $r = -2$, $r = 3$ & $r = -4$, todas de multiplicidad 1.
11. $r = \pm 3i$ de multiplicidad 2.
12. $r = 0$ de multiplicidad 2 & $r = -2$ de multiplicidad 3.
13. $r = \pm i$ & $r = \pm 1$, todas de multiplicidad 2.
14. $r = \dfrac{1}{2}$, $r = \dfrac{2}{3}$ & $r = \dfrac{3}{2}$, todas de multiplicidad 1.
15. $r = -3 \pm 2i$ de multiplicidad 2.

Ejercicios 4.5.1 *Obtención de una ecuación diferencial.* *Página 4*

1. $y'' + y' - 30y = 0.$
2. $y'' + 16y' + 64y = 0.$
3. $y'' + 4y' + 13y = 0.$
4. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0.$
5. $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = 0.$
6. $18y''' - 3y'' - 4y' + y = 0.$
7. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$
8. $y^{(6)} - 3y^{(5)} + 3y^{(4)} - y''' = 0.$
9. $y^{(5)} - 15y''' + 10y'' + 60y' - 72y = 0.$
10. $y''' + 3y'' - 10y' - 24y = 0.$
11. $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0.$
12. $y^{(5)} + 6y^{(4)} + 12y''' + 8y'' = 0.$
13. $y^{(8)} - 2y^{(4)} + y = 0.$
14. $12y''' - 32y'' + 25y' - 6y = 0.$
15. $y^{(4)} + 12y''' + 62y'' + 156y' + 169y = 0.$