CAPÍTULO

4

Ecuaciones diferenciales de orden superior

4.4.2 ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden $n \geq 3$

En la sección anterior hemos obtenido las soluciones de la ED lineal homogénea con coeficientes constantes de orden dos, es decir:

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Las soluciones fueron determinadas proponiendo una solución de la forma exponencial $y = e^{rx}$, con r constante, y resolviendo luego la ecuación característica:

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Los tres diferentes tipos de solución de esta ecuación algebraica determinaron los tres diferentes tipos de solución general para la ecuación diferencial.
De manera análoga se resuelve la ecuación diferencial lineal homogénea de orden $n \geq 3$:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_3, a_2, a_1, a_0$ son constantes y donde $a_n \neq 0$.
Se propone que una solución sea de la forma $y = e^{rx}$, por lo tanto:

$$y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rx} \Rightarrow y^{(3)} = r^3 e^{rx} \Rightarrow \ldots \Rightarrow y^{(n)} = r^n e^{rx}.$$

Al sustituir en la ecuación diferencial, se obtiene la ecuación auxiliar o característica:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

El polinomio auxiliar o característico de grado n:

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0$$

tiene n raíces. Esta última afirmación se sustenta en el teorema Fundamental del Álgebra, en el que se asegura que: "todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales o complejos tiene exactamente n raíces

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

reales o complejas, considerando sus multiplicidades". Cada una de las raíces genera una solución de la ecuación diferencial.
Cuando una raíz r se repite k-veces, se dice que tiene multiplicidad k, y una raíz es de multiplicidad uno cuando sólo aparece una vez. Así, la suma de las multiplicidades de las raíces será igual al grado n del polinomio característico.
Ilustramos mediante los siguientes ejemplos las relaciones entre ED lineales con coeficientes constantes, sus polinomios característicos y las multiplicidades de sus raíces.

Ejemplo 4.4.1 *Encuentra una ED que tenga como polinomio característico*

$$p(r) = (r-1)^2(r+3)(r-2)^3.$$

▼ Las raíces del polinomio $p(r)$ son

$r = 1$ (cuando $r - 1 = 0$) y, por repetirse 2 veces, tiene multiplicidad 2.

$r = -3$ (cuando $r + 3 = 0$) y tiene multiplicidad 1.

$r = 2$ (cuando $r - 2 = 0$) y, por repetirse 3 veces, tiene multiplicidad 3.

La suma de las multiplicidades en este caso es $6 = 2 + 1 + 3$, que es precisamente el grado del polinomio característico

$$p(r) = (r-1)^2(r+3)(r-2)^3 = r^6 - 5r^5 + r^4 + 37r^3 - 86r^2 + 76r - 24.$$

Este polinomio es el polinomio auxiliar asociado a la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

$$y^{(6)} - 5y^{(5)} + y^{(4)} + 37y^{(3)} - 86y'' + 76y' - 24y = 0,$$

que es de orden 6.

□

Ejemplo 4.4.2 *Encuentra una ED que tenga como polinomio característico*

$$p(r) = r^3(r^2-1)(r^2+1).$$

▼ $p(r)$ tiene las raíces siguientes:

$r = 0$ (cuando $r^3 = 0$), y tiene multiplicidad 3.

$r = \pm 1$ (cuando $r^2 - 1 = 0$), con multiplicidad 1 cada una.

$r = \pm i$ (cuando $r^2 + 1 = 0,$ o bien $r^2 = -1$), con multiplicidad 1 cada una.

La suma de las multiplicidades es 7, esto es, $3 + 1 + 1 + 1 + 1$, que es precisamente el grado del polinomio característico

$$p(r) = r^3(r^2-1)(r^2+1) = r^7 - r^3,$$

el cual es el polinomio auxiliar asociado a la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

$$y^{(7)} - y^{(3)} = 0,$$

que es de orden 7.

□

El mayor problema que encontraremos al resolver la ecuación diferencial lineal homogénea de orden $n \geq 3$ está en encontrar las raíces del polinomio característico de grado n:

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0,$$

ya que, en general, no se tiene una fórmula para encontrar sus raíces, como sí se tiene para la ecuación de segundo grado.
Un resultado que ayuda en esta problemática es el teorema del Residuo, el cual nos permite afirmar que:
Si $P(r)$ es un polinomio (característico) y $r = r_1$ es una raíz de $P(r)$, entonces $(r - r_1)$ es un factor de $P(r)$. Esto es, $P(r) = (r - r_1)Q(r)$; donde $Q(r)$ es el polinomio que resulta de dividir $P(r)$ entre $r - r_1$. Es claro que, si $P(r)$ es de grado n, entonces $Q(r)$ es de grado $n - 1$.

En álgebra superior se demuestra que, si $r = \dfrac{\alpha}{\beta}$ es una raíz racional del polinomio

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_2 r^2 + a_1 r + a_0,$$

entonces, α debe ser un divisor de a_0 y β debe ser un divisor del coeficiente a_n. De esta manera, para un polinomio como $p(r) = r^3 - r^2 + r - 1$, sus posibles raíces racionales son de la forma $r = \dfrac{\alpha}{\beta}$, donde α es un divisor de $a_0 = 1$ y β es un divisor de $a_3 = 1$. Esto es, los posibles valores de α son ± 1 y de β son ± 1; por ello, las posibles raíces racionales del polinomio $p(r)$ son $r = \pm 1$. Ahora bien, para determinar si alguno de estos valores es una raíz del polinomio, se requiere saber si $p(r) = 0$. Mediante cálculos numéricos podemos ver que $r = 1$ es una raíz de $p(r)$, ya que $p(1) = 0$.

Ejemplo 4.4.3 *Encuentre las raíces del polinomio* $P(r) = r^3 - r^2 + r - 1$.

▼
Por ser $r = 1$ una raíz de $P(r)$, se puede afirmar que $(r - 1)$ es un factor de $P(r)$.
Realizando la división de polinomios

$$\frac{P(r)}{r-1} = \frac{r^3 - r^2 + r - 1}{r - 1},$$

encontramos que $\dfrac{P(r)}{r-1} = r^2 + 1$, por lo cual $P(r) = (r - 1)(r^2 + 1)$. De esto se desprende que

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0 \;\Rightarrow\; (r - 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Por lo tanto las raíces de $P(r)$ son: $r = 1$ & $r = \pm i$.

□

Ejemplo 4.4.4 *Encuentre las raíces del polinomio* $P(r) = r^3 + r^2 - 4r - 4$.

▼ Mediante cálculos numéricos podemos ver que $P(r) = 0$, para $r = 2$. Se afirma entonces que $r = 2$ es una raíz de $P(r)$, por lo cual $(r - 2)$ es un factor de $P(r)$.
Realizando la división $\dfrac{P(r)}{r-2}$, obtenemos:

$$\frac{r^3 + r^2 - 4r - 4}{r - 2} = r^2 + 3r + 2,$$

por lo que se puede afirmar que $r^3 + r^2 - 4r - 4 = (r - 2)(r^2 + 3r + 2)$.
Y debido a que $r^2 + 3r + 2 = (r + 1)(r + 2)$, tenemos:

$$r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0 \;\Rightarrow\; (r - 2)(r + 1)(r + 2) = 0.$$

Por lo tanto las raíces de $P(r)$ son: $r = -2$; $r = -1$; $r = 2$.

□

Otro resultado del álgebra indica que todo polinomio con coeficientes reales se puede expresar como producto de polinomios lineales y polinomios cuadráticos irreducibles (con coeficientes también reales). Dichos polinomios cuadráticos no pueden factorizarse mediante polinomios lineales con coeficientes reales.
En consecuencia:

- El polinomio característico $P(r)$ de grado $n \ge 3$ puede expresarse como un producto de factores que pueden ser lineales o bien cuadráticos irreducibles.
- Los factores lineales generan raíces reales r.
- Los factores cuadráticos irreducibles siempre generan parejas de raíces complejas conjugadas $r = \alpha \pm i\beta$.

Podemos entonces utilizar las soluciones obtenidas en la ED lineal homogénea de orden 2, a efecto de construir un conjunto fundamental de soluciones de la ED lineal homogénea de orden $n \ge 3$. Tenemos:

- Si r es una raíz real de multiplicidad k, entonces en el conjunto fundamental de soluciones se incluirán las soluciones
$$\{e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx}, \ldots, x^{k-1}e^{rx}\}.$$
- Si $r = \alpha \pm i\beta$ es un par de soluciones complejas conjugadas de multiplicidad m, entonces en el conjunto fundamental de soluciones se incluirán las soluciones
$$\left\{ e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \right\};$$
$$\left\{ e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \right\}.$$

Y como en el caso de la ED lineal homogénea de orden 2, la solución general de la ED lineal homogénea de orden $n \ge 3$ será una combinación lineal de soluciones de estos tipos.

Ejemplo 4.4.5 *Obtener la solución general de la ecuación diferencial* $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$.

▼ Proponiendo como solución $y = e^{rx}$, se obtiene la ecuación característica
$$r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0,$$
que, como vimos en el ejemplo 4.4.4 anterior, se puede expresar así:
$$(r-2)(r+1)(r+2) = 0,$$
ecuación que se cumple cuando:
$$\begin{cases} r-2=0 \\ r+1=0 \\ r+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2; \\ r_2 = -1; \\ r_3 = -2. \end{cases}$$
Tenemos entonces 3 raíces reales, las que generan 3 soluciones exponenciales
$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-x} \quad \& \quad y_3 = e^{-2x},$$
las cuales forman un conjunto fundamental de soluciones.
Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es
$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x},$$
donde c_1, c_2 & c_3 son constantes arbitrarias.

□

Ejemplo 4.4.6 *Resolver la ecuación diferencial* $y^{(3)} - y'' + y' - y = 0$.

▼ Proponiendo como solución $y = e^{rx}$, se obtiene la ecuación característica
$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0,$$
que, como vimos en el ejemplo 4.4.3 anterior, se puede expresar así:
$$(r-1)(r^2+1) = 0;$$

ecuación que se cumple cuando:

$$\begin{cases} r-1=0 \\ r^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ r^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=1; \\ r=\pm i. \end{cases}$$

Tenemos una raíz real $r_1 = 1$, la cual genera una solución exponencial: $y_1 = e^x$.
También se tiene un par de raíces complejas conjugadas $r = \pm i = 0 \pm 1i$, las cuales dan origen a las soluciones: $y_2 = e^{0x} \cos 1x = \cos x$ & $y_3 = e^{0x} \operatorname{sen} 1x = \operatorname{sen} x$.
Entonces, el conjunto fundamental de soluciones está conformado por las funciones: e^x, $\cos x$ & $\operatorname{sen} x$.
Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y = c_1e^x + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x,$$

con c_1, c_2 & c_3 constantes arbitrarias.

□

Ejemplo 4.4.7 *Obtener la solución general de la ED* $y^{(6)} - 5y^{(5)} + y^{(4)} + 37y^{(3)} - 86y'' + 76y' - 24y = 0$.

▼ Proponiendo como solución $y = e^{rx}$, se obtiene la ecuación característica

$$r^6 - 5r^5 + r^4 + 37r^3 - 86r^2 + 76r - 24 = 0,$$

que, como vimos en el ejemplo 4.4.1 anterior, se puede expresar así:

$$(r-1)^2(r+3)(r-2)^3 = 0,$$

ecuación que se cumple cuando:

$$\begin{cases} (r-1)^2=0 \\ r+3=0 \\ (r-2)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r-1=0 \\ r+3=0 \\ r-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1=1; \\ r_2=-3; \\ r_3=2. \end{cases}$$

Que son raíces reales de diversas multiplicidades.
La raíz real $r_1 = 1$ de multiplicidad 2 genera dos soluciones: $y_1 = e^x$ & $y_2 = xe^x$.
La raíz real $r_2 = -3$ de multiplicidad 1 da origen a sólo una solución: $y_3 = e^{-3x}$.
La raíz real $r_3 = 2$ de multiplicidad 3 genera tres soluciones: $y_4 = e^{2x}$, $y_5 = xe^{2x}$ & $y_6 = x^2e^{2x}$.
Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-3x} + c_4e^{2x} + c_5xe^{2x} + c_6x^2e^{2x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = (c_1 + c_2x)e^x + c_3e^{-3x} + (c_4 + c_5x + c_6x^2)e^{2x}.$$

□

Ejemplo 4.4.8 *Resolver la ecuación diferencial* $y^{(7)} + 8y^{(5)} + 16y^{(3)} = 0$.

▼ Proponiendo como solución $y = e^{rx}$, se obtiene la ecuación característica

$$r^7 + 8r^5 + 16r^3 = 0,$$

que se puede expresar así:

$$r^3(r^4 + 8r^2 + 16) = 0 \Rightarrow r^3(r^2+4)^2 = 0,$$

ecuación que se cumple cuando:

$$\begin{cases} r^3=0 \\ (r^2+4)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=0 \\ r^2+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=0 \\ r^2=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=0; \\ r=\pm 2i. \end{cases}$$

La raíz real $r = 0$ tiene multiplicidad 3 y genera tres soluciones:
$y_1 = e^{0x} = 1$; $y_2 = xe^{0x} = x$ & $y_3 = x^2e^{0x} = x^2$.

El par de raíces complejas conjugadas $r = 0 \pm 2i$, de multiplicidad 2, generan 4 soluciones:
$y_4 = e^{0x}\cos 2x = \cos 2x$; $y_5 = e^{0x}\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 2x$; $y_6 = x\cos 2x$ & $y_7 = x\operatorname{sen} 2x$.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y = c_1(1) + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos 2x + c_5\operatorname{sen} 2x + c_6x\cos 2x + c_7x\operatorname{sen} 2x,$$

o bien

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + (c_4 + c_6x)\cos 2x + (c_5 + c_7x)\operatorname{sen} 2x.$$

□

Ejercicios 4.4.2 *ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden $n \geq 3$.* *Soluciones en la página 7*
Obtener la solución general de las ED siguientes:

1. $y''' + 7y'' + 10y' = 0$.
2. $y''' - 2y'' + y' = 0$.
3. $y''' - 3y'' + 3y' - 1 = 0$.
4. $y^{(4)} - y'' = 0$.
5. $y^{(4)} + y'' = 0$.
6. $y^{(6)} - y'' = 0$.
7. $y''' + y'' - 2y = 0$.
8. $y''' + 3y'' + 3y' + 1 = 0$.
9. $y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$.
10. $y^{(4)} - 16y = 0$.
11. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.
12. $y^{(7)} - 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0$.
13. $16y^{(4)} - y = 0$.
14. $y^{(3)} - 8y = 0$.
15. $y^{(5)} + 8y^{(3)} = 0$.
16. $y^{(8)} - 2y^{(4)} + y = 0$.

Ejercicios 4.4.2 *ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden n.* *Página 6*

1. $y = c_1 + c_2e^{-2x} + c_3e^{-5x}$.
2. $y = c_1 + c_2e^{x} + c_3xe^{x}$.
3. $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + c_3x^2e^{x}$.
4. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + c_4e^{x}$.
5. $y = c_1 + c_2x + c_3\cos x + c_4\operatorname{sen} x$.
6. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + c_4e^{x} + c_5\cos x + c_6\operatorname{sen} x$.
7. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x}\cos x + c_3e^{-x}\operatorname{sen} x$.
8. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}$.
9. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x} + c_4e^{2x}$.
10. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} + c_3\cos 2x + c_4\operatorname{sen} 2x$.
11. $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + c_3x\cos x + c_4x\operatorname{sen} x$.
12. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + c_5xe^{-x} + c_6e^{x} +$
    $+ c_7xe^{x}$.
13. $y = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2e^{-\frac{x}{2}} + c_3\cos\dfrac{x}{2} + c_4\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$.
14. $y = c_1e^{2x} + e^{-x}[c_2\cos(\sqrt{3}x) + c_3\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)]$.
15. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos(2\sqrt{2}x) + c_5\operatorname{sen}(2\sqrt{2}x)$.
16. $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + c_3x\cos x + c_4x\operatorname{sen} x +$
    $+ c_5e^{x} + c_6xe^{x} + c_7e^{-x} + c_8xe^{-x}$.