CAPÍTULO

4

Ecuaciones diferenciales de orden superior

4.4 ED lineales homogéneas con coeficientes constantes

4.4.1 ED homogéneas con coeficientes constantes de orden 2

El objetivo de esta sección es determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0;$$

donde $a \neq 0, b, c$ son constantes.
Una solución $y(x)$ de esta ED es una función que satisface lo siguiente: el resultado de c-veces la función $y(x)$, más b-veces su primera derivada $y'(x)$, más a-veces su segunda derivada $y''(x)$, es igual a cero.
Para que esto suceda la función $y(x)$ y sus derivadas deben tener la misma forma, lo que quiere decir que las funciones $y(x)$, $y'(x)$ & $y''(x)$ deben diferir entre ellas cuando mucho un factor constante. Una función que cumple con este requisito es la función exponencial $y = e^{rx}$, con r constante. En efecto:

$$y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^2e^{rx}.$$

Supongamos pues que las soluciones de $ay'' + by' + cy = 0$ son de la forma $y = e^{rx}$, con r constante.
Ahora, $y = e^{rx}$ es solución si

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\Rightarrow ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \Rightarrow ar^2 + br + c = 0, \end{aligned}$$

ya que $e^{rx} > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Concretando: $y = e^{rx}$ es solución de la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{4.1}$$

si y sólo, si r es solución de la ecuación algebraica

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{4.2}$$

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

Las soluciones de esta ecuación cuadrática están dadas por la conocida fórmula

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

y la naturaleza de dichas soluciones depende del signo del discriminante $b^2 - 4ac$.

A la ecuación algebraica (4.2) la denominamos la ecuación característica o bien la ecuación auxiliar de la ED (4.1). Y al polinomio $p(r) = ar^2 + br + c$ le llamaremos el polinomio característico o bien el polinomio auxiliar de la ecuación diferencial.

Existen tres posibilidades para el discriminante $b^2 - 4ac$. Veamos qué sucede en cada caso.

Caso 1. $b^2 - 4ac > 0$.

$$b^2 - 4ac > 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{b^2 - 4ac} \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; r \in \mathbb{R}.$$

Se tienen dos soluciones reales

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \& \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

las cuales son diferentes ($r_1 \neq r_2$).

Conociendo estas raíces del polinomio auxiliar, podemos factorizar este polinomio como sigue:

$$p(r) = a(r - r_1)(r - r_2).$$

Estas raíces reales diferentes generan un par de funciones exponenciales reales, que son soluciones de la ecuación diferencial

$$r = r_1 \longrightarrow y_1 = e^{rx} = e^{r_1 x}.$$
$$r = r_2 \longrightarrow y_2 = e^{rx} = e^{r_2 x}.$$

Obtenidas éstas, debemos preguntarnos si $y_1 = e^{r_1 x}$ & $y_2 = e^{r_2 x}$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la ED $ay'' + by' + cy = 0$.

Para responder a esta cuestión calculamos el wronskiano de y_1 & y_2:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} =$$
$$= r_2 e^{r_1 x + r_2 x} - r_1 e^{r_1 x + r_2 x} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x}.$$

Debido a que $e^{(r_1+r_2)x} > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y para $r_2 - r_1 \neq 0$, por ser $r_1 \neq r_2$, se tiene que $W(y_1, y_2) \neq 0$ en todo $\mathbb{R}$.

Luego, $y_1 = e^{r_1 x}$ & $y_2 = e^{r_2 x}$ forman un conjunto fundamental de soluciones, por lo que la solución general de la ecuación diferencial, en este caso, es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

Ejemplo 4.4.1 *Obtener la solución general de la ED*

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

▼ Proponiendo $y = e^{rx}$ como solución de la ED, se obtiene la ecuación auxiliar $r^2 - 5r + 6 = 0$, cuyas soluciones son

$$r = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{3x}; \\ y_2 = e^{2x}. \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}.$$

Es decir, la solución general de la ED es el plano generado por las funciones $y_1 = e^{3x}$ & $y_1 = e^{2x}$, las cuales forman un conjunto fundamental de soluciones.

□

Caso 2. $b^2 - 4ac = 0$.

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \Rightarrow r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Se tiene sólo una solución real $r_1 = -\dfrac{b}{2a}$, de multiplicidad dos, la cual genera una función exponencial real $y_1 = e^{r_1 x} = e^{-\frac{b}{2a}x}$, que es solución de la ecuación diferencial.

Conociendo esta raíz de multiplicidad 2, factorizamos el polinomio auxiliar como sigue:

$$p(r) = a(r - r_1)^2.$$

Por la necesidad de tener dos soluciones reales linealmente independientes de la ecuación diferencial, aplicamos el método de reducción de orden para obtener otra solución y_2.

Proponiendo $y_2 = ue^{-\frac{b}{2a}x}$:

$$y_2' = u'e^{-\frac{b}{2a}x} + ue^{-\frac{b}{2a}x}\left(-\frac{b}{2a}\right) = \left(u' - \frac{b}{2a}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x};$$

$$y_2'' = \left(u'' - \frac{b}{2a}u'\right)e^{-\frac{b}{2a}x} + \left(u' - \frac{b}{2a}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x}\left(-\frac{b}{2a}\right) =$$

$$= \left(u'' - \frac{b}{2a}u' - \frac{b}{2a}u' + \frac{b^2}{4a^2}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x} = \left(u'' - \frac{b}{a}u' + \frac{b^2}{4a^2}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Ahora bien, y_2 es solución de $ay'' + by' + cy = 0$, si

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\left(u'' - \frac{b}{a}u' + \frac{b^2}{4a^2}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x} + b\left(u' - \frac{b}{2a}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x} + cue^{-\frac{b}{2a}x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(au'' - bu' + \frac{b^2}{4a}u + bu' - \frac{b^2}{2a}u + cu\right)e^{-\frac{b}{2a}x} = 0 \Rightarrow au'' + u\left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow au'' + \left(\frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}\right)u = 0 \Rightarrow au'' + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}u = 0 \Rightarrow au'' - \frac{b^2 - 4ac}{4a}u = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow au'' = 0 \text{, ya que } b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow u'' = 0 \text{, ya que } a \neq 0.$$

Pero $u'' = 0 \Rightarrow u' = c_1 \Rightarrow u = c_1 x + c_2$, con c_1 & c_2 constantes.

De esta familia de funciones elegimos una función:

$$c_1 = 1 \;\&\; c_2 = 0 \Rightarrow u = x.$$

Entonces podemos tomar para la segunda solución:

$$y_2 = ue^{-\frac{b}{2a}x} = xe^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Y debido a que la solución $y_2 = uy_1$ forma con y_1 un conjunto fundamental de soluciones, se puede afirmar que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} = (c_1 + c_2x)e^{rx} \text{ , con } r = -\frac{b}{2a}.$$

Ejemplo 4.4.2 *Obtener la solución general de la ED*

$$4y'' - 12y' + 9y = 0.$$

▼ Proponiendo $y = e^{rx}$ como solución de la ED, se obtiene la ecuación característica

$$4r^2 - 12r + 9 = 0,$$

de donde resulta:

$$r = \frac{12 \pm 0}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2} \Rightarrow y_1 = e^{\frac{3}{2}x}.$$

Entonces, otra solución es $y_2 = xe^{\frac{3}{2}x}$. Por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1e^{\frac{3}{2}x} + c_2xe^{\frac{3}{2}x} \Rightarrow y = (c_1 + c_2x)e^{\frac{3}{2}x}.$$

□

Caso 3. $b^2 - 4ac < 0$.

$$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} \notin \mathbb{R} \Rightarrow r \notin \mathbb{R}.$$

Ahora, las soluciones no son reales, sino que son números complejos dados de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow -(b^2 - 4ac) = 4ac - b^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{4ac - b^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)(4ac - b^2)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow r = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-1}\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \alpha \pm i\beta, \end{aligned}$$

donde $\alpha = -\dfrac{b}{2a} \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ & $\beta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \in \mathbb{R}$.

Se tienen dos soluciones complejas:

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad \& \quad r_2 = \alpha - i\beta.$$

Conociendo estas raíces complejas del polinomio auxiliar, podemos factorizar este polinomio como sigue:

$$p(r) = a(r - r_1)(r - r_2).$$

Estas raíces generan un par de funciones exponenciales complejas, que son soluciones de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} r = r_1 &\longrightarrow y_1 = e^{r_1x} = e^{(\alpha + i\beta)x}. \\ r = r_2 &\longrightarrow y_2 = e^{r_2x} = e^{(\alpha - i\beta)x}. \end{aligned}$$

A partir de este par de funciones complejas, generamos un par de soluciones reales. Para ello se utiliza la fórmula de Euler, la cual asegura que para $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

Considerando esta fórmula y las identidades

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad \& \quad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta.$$

se obtiene que

$$e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta.$$

Es decir,

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta.$$

Utilizando estas fórmulas para $e^{i\theta}$ & $e^{-i\theta}$ con $\theta = \beta x$, se tiene que

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x);$$
$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x - i\beta x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x).$$

Y debido a que y_1 & y_2 son soluciones de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, también lo son

$$y_1 + y_2 = e^{\alpha x}(2\cos\beta x + 0) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x;$$
$$y_1 - y_2 = e^{\alpha x}(0 + 2i \operatorname{sen}\beta x) = 2ie^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

Así también, son soluciones de la misma ecuación diferencial las siguientes funciones:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x;$$
$$\phi_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

Éstas son funciones reales y constituyen una pareja de soluciones para la ED.

¿Forman $\phi_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ & $\phi_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$?

Para responder esto calculamos el wronskiano de ϕ_1 & ϕ_2:

$$\begin{aligned} W(\phi_1, \phi_2) &= \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{vmatrix} = \phi_1\phi_2' - \phi_2\phi_1' = \\ &= e^{\alpha x}(\cos\beta x)[\alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x] - e^{\alpha x}(\operatorname{sen}\beta x)[\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x] = \\ &= e^{2\alpha x}[\alpha\cos\beta x\operatorname{sen}\beta x + \beta\cos^2\beta x - \alpha\operatorname{sen}\beta x\cos\beta x + \beta\operatorname{sen}^2\beta x] = \\ &= e^{2\alpha x}[\beta(\cos^2\beta x + \operatorname{sen}^2\beta x)] = \beta e^{2\alpha x} \end{aligned}$$

$$W(\phi_1, \phi_2) = \beta e^{2\alpha x}\text{ , donde } \beta = \frac{4ac - b^2}{2a} \neq 0.$$

Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$W(\phi_1, \phi_2) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0,$$

por lo cual se puede afirmar que las funciones reales $\phi_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ & $\phi_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial.

Por lo tanto, la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$, en este caso, es

$$y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \;\Rightarrow\; y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\operatorname{sen}\beta x);$$

donde α, β son la parte real e imaginaria de las raíces $r = \alpha \pm i\beta$.

Ejemplo 4.4.3 *Obtener la solución general de la ecuación diferencial*

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

▼ Proponiendo $y = e^{rx}$ como solución de la ED, se obtiene la ecuación auxiliar:

$$r^2 + 4r + 13 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3i \text{ (raíces complejas)}.$$

Entonces, la solución general es

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x).$$

□

Observe que la ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$, de la ED $ay'' + by' + cy = 0$, se obtiene asociando las derivadas $y^{(n)}$ con la potencias r^n en la forma

$$y^{(n)} \longrightarrow r^n.$$

Como $y^{(0)} = y$, asociamos

$$y^{(0)} = y \longrightarrow 1 = r^0.$$

Ejemplo 4.4.4 *Obtener la solución general de la ecuación diferencial*

$$-2y'' - 3y' + 2y = 0.$$

▼ Proponiendo $y = e^{rx}$ como solución de la ED, se obtiene la ecuación característica

$$-2r^2 - 3r + 2 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$r = \frac{3 \pm 5}{-4} = \begin{cases} r_1 = -2 \\ r_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-2x}; \\ y_2 = e^{\frac{1}{2}x}. \end{cases}$$

Entonces, la solución general de la ED es

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}.$$

□

Ejemplo 4.4.5 *Obtener la solución general de la ecuación diferencial*

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

▼ Proponiendo $y = e^{rx}$ como solución de la ED, se obtiene la ecuación auxiliar

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$r = \frac{-2 \pm 0}{2} \Rightarrow r_1 = r_2 = -1 \Rightarrow y_1 = e^{-x}.$$

Entonces, la raíz -1 es de multiplicidad 2; necesitamos otra solución: ésta es $y_2 = xe^{-x}$.
Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \Rightarrow y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}.$$

□

Ejemplo 4.4.6 *Obtener la solución general de la ecuación diferencial*

$$y'' + y' + y = 0.$$

▼ Proponiendo $y = e^{rx}$ como solución de la ED, se obtiene la ecuación característica

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ (raíces complejas)}.$$

Entonces la solución general de la ED es

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

□

Ejemplo 4.4.7 *Obtener la solución general de la ecuación diferencial*

$$y'' + 4y = 0.$$

▼ Proponiendo $y = e^{rx}$, se obtiene la ecuación auxiliar

$$r^2 + 4 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$r = \pm\sqrt{-4} = 0 \pm 2i \text{ (raíces complejas)}.$$

Entonces la solución general es

$$y = e^{0x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) \Rightarrow y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x.$$

□

Ejemplo 4.4.8 *Obtener la solución general del PVI:*

$$9y'' - y = 0, \; \textit{con } y(0) = 1 \quad \& \quad y'(0) = \frac{2}{3}.$$

▼ Proponiendo $y = e^{rx}$ como solución de la ED, se obtiene la ecuación característica

$$9r^2 - 1 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$r = \pm\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{1}{3} \\ r_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{\frac{1}{3}x}; \\ y_2 = e^{-\frac{1}{3}x}. \end{cases}$$

Entonces, la solución general de la ED es

$$y = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 e^{-\frac{1}{3}x}.$$

Derivando esta solución general, se obtiene

$$y' = \frac{1}{3}c_1 e^{\frac{1}{3}x} - \frac{1}{3}c_2 e^{-\frac{1}{3}x}.$$

Usando las condiciones iniciales

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1;$$
$$y'(0) = \frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{3}c_2 = \frac{2}{3}.$$

La solución del sistema anterior, de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, es

$$c_1 = \frac{3}{2} \quad \& \quad c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la solución del PVI, es la función

$$y = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{3}x} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}x}.$$

□

Ejemplo 4.4.9 *Obtener la solución general de la ecuación diferencial*

$$y'' - 5y' = 0.$$

▼ Proponiendo $y = e^{rx}$ como solución de la ED, se obtiene la ecuación auxiliar

$$r^2 - 5r = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{0x} = 1; \\ y_2 = e^{5x}. \end{cases}$$

Entonces la solución general de la ED es

$$y = c_1 + c_2e^{5x}.$$

□

Ejemplo 4.4.10 *Obtener la solución general de la ecuación diferencial*

$$y'' + w^2y = 0, \quad \textit{con } w \textit{ constante.}$$

▼ Proponiendo $y = e^{rx}$, se obtiene la ecuación característica

$$r^2 + w^2 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$r = \pm\sqrt{-w^2} = \pm wi = 0 \pm wi \text{ (raíces complejas)}.$$

Por lo tanto la solución general es

$$y = e^{0x}(c_1 \operatorname{sen} wx + c_2 \cos wx) \Rightarrow y = c_1 \operatorname{sen} wx + c_2 \cos wx.$$

□

La solución general del ejemplo anterior puede expresarse así:

$$y = A \operatorname{sen}(wx + \phi), \text{ con } A \ \& \ \phi \text{ constantes}.$$

Para obtener la última expresión se efectúa el desarrollo siguiente:
Se tiene:

$$y = c_1 \operatorname{sen} wx + c_2 \cos wx.$$

Se quiere:

$$\begin{aligned} y &= A\,\mathrm{sen}(wx+\phi) = A(\mathrm{sen}\,wx\cos\phi + \mathrm{sen}\,\phi\cos wx) = \\ &= (A\cos\phi)\,\mathrm{sen}\,wx + (A\,\mathrm{sen}\,\phi)\cos wx. \end{aligned}$$

Igualando la expresión que se quiere con la que se tiene se llega a:

$$(A\cos\phi)\,\mathrm{sen}\,wx + (A\,\mathrm{sen}\,\phi)\cos wx = c_1\,\mathrm{sen}\,wx + c_2\cos wx.$$

Igualdad que se cumple si

$$\begin{cases} A\cos\phi = c_1 \\ A\,\mathrm{sen}\,\phi = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2\cos^2\phi = c_1^2; \\ A^2\,\mathrm{sen}^2\phi = c_2^2. \end{cases}$$

Sumando las últimas igualdades:

$$A^2(\cos^2\phi + \mathrm{sen}^2\phi) = c_1^2 + c_2^2 \Rightarrow A^2 = c_1^2 + c_2^2 \Rightarrow A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

De $A\cos\phi = c_1$, se tiene: $\cos\phi = \dfrac{c_1}{A} = \dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$.

De $A\,\mathrm{sen}\,\phi = c_2$, se tiene: $\mathrm{sen}\,\phi = \dfrac{c_2}{A} = \dfrac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$.

Resumiendo, la solución general de la ED

$$y'' + w^2 y = 0$$

es

$$y = c_1\,\mathrm{sen}\,wx + c_2\cos wx.$$

Que puede expresarse como

$$y = A\,\mathrm{sen}(wx+\phi).$$

Donde

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{c_1^2+c_2^2}. \\ \cos\phi &= \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}. \\ \mathrm{sen}\,\phi &= \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}. \end{aligned}$$

A es denominada amplitud y ϕ es denominado ángulo de fase.

Ejercicios 4.4.1 *ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden 2.* *Soluciones en la página 11*
Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes.

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$.
2. $y'' + y = 0$.
3. $4y'' - 4y' + y = 0$.
4. $y'' + 2y' - 3y = 0$.
5. $4y'' + y = 0$.
6. $9y'' - 6y' + y = 0$.
7. $6y'' - y' - y = 0$.
8. $y'' - 2y' + 2y = 0$.
9. $y'' + 4y' + 5y = 0$.
10. $y'' - y = 0$.

Resolver los siguientes PVI.

11. $y'' + 16y = 0$, con $y(0) = 2$ & $y'(0) = -2$.
12. $y'' + y' - 2y = 0$, con $y(0) = 0$ & $y'(0) = 1$.
13. $y'' - 6y' + 9y = 0$, con $y(0) = 0$ & $y'(0) = 2$.

14. $y'' + 4y' + 5y = 0$, con $y(0) = 1$ & $y'(0) = 0$.

15. $y'' + 4y' + 3y = 0$, con $y(0) = 2$ & $y'(0) = 0$.

Ejercicios 4.4.1 *ED lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden 2.* *Página 9*

1. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$.
2. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$.
3. $y = (c_1 + c_2x)e^{\frac{x}{2}}$.
4. $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{x}$.
5. $y = c_1 \cos \dfrac{x}{2} + c_2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$.
6. $y = (c_1 + c_2x)e^{\frac{x}{3}}$.
7. $y = c_1e^{-\frac{x}{3}} + c_2e^{\frac{x}{2}}$.
8. $y = e^{x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$.
9. $y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$.
10. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x}$.
11. $y = 2\cos 4x - \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 4x$.
12. $y = \dfrac{1}{3}(e^{x} - e^{-2x})$.
13. $y = 2xe^{3x}$.
14. $y = e^{-2x}(\cos x + 2 \operatorname{sen} x)$.
15. $y = 3e^{-x} - e^{-3x}$.