CAPÍTULO

4

Ecuaciones diferenciales de orden superior

4.1 Conceptos básicos

En este capítulo trataremos sobre el procedimiento que debemos llevar a cabo para obtener la solución general de la ED lineal no homogénea de orden n:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x).$$

Con este objetivo realizaremos un estudio detallado sobre la forma de resolver a la ED lineal no homogénea de segundo orden:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x)$$

y para esto trataremos primero con la ED lineal homogénea de segundo orden:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Así, una vez obtenida la solución general de la homogénea, resolveremos la no homogénea.

- Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden es de la forma:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{4.1}$$

  Es decir, los coeficientes de y así como de sus dos derivadas dependen sólo de x (o son constantes) y los exponentes de y y sus derivadas son 1.

La parte izquierda de la ecuación diferencial es un operador L que asocia funciones a funciones, es decir, L es una función de funciones:

$$L : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F},$$

donde $\mathfrak{F}$ es el conjunto de funciones reales de variable real que son derivables a cualquier orden.

- L se define como sigue:

$$L(y) = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

- Una solución de la ecuación diferencial (4.1) es una función $f(x) \in \mathfrak{F}$ que cumple:

$$L[f(x)] = 0.$$

Es decir, al sustituir $f(x)$ y sus derivadas correspondientes en la ecuación diferencial, se satisface a la ED.

- Resolver la ecuación diferencial (4.1) significa encontrar todas sus soluciones.

Ejemplo 4.1.1 *La siguiente es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:*

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0.$$

En este caso

$$L(y) = x^2y'' + 2xy' - 6y.$$

1. *Si $f(x) = x$, calcular $L[f(x)]$.*
2. *Si $g(x) = x^2$, calcular $L[g(x)]$.*

▼

1. Si $y = f(x) = x$, calcular $L(x)$.
   (Sabemos en este caso que $y' = 1$ & $y'' = 0$.)
   $$L(y) = L[f(x)] = L(x) = x^2(0) + 2x(1) - 6x = 2x - 6x = -4x.$$
   Por consiguiente, la función $y = x$ no es solución de la ecuación diferencial $L(y) = 0$.
2. Si $y = g(x) = x^2$, calcular $L(x^2)$.
   (Sabemos en este caso que $y' = 2x$ & $y'' = 2$.)
   $$L(y) = L[g(x)] = L(x^2) = x^2(2) + 2x(2x) - 6x^2 = 2x^2 + 4x^2 - 6x^2 = 0.$$
   Este último resultado nos dice que la función $y = x^2$ es solución de la ecuación diferencial $L(y) = 0$.

□ El operador L tiene las siguientes propiedades:

- Si y es solución de $L(y) = 0$, entonces $\overline{y} = cy$ también es solución; donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria.

  ▼ Como y es solución de $L(y) = 0$, entonces:

  $$L(y) = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

  Aplicando el operador $L(y)$ a la función $\overline{y} = cy$, se tiene que

  $$\begin{aligned} L(\overline{y}) = L(cy) &= a_2(x)(cy)'' + a_1(x)(cy)' + a_0(x)(cy) = \\ &= a_2(x) \cdot cy'' + a_1(x) \cdot cy' + a_0(x) \cdot cy = \\ &= c \underbrace{\left[a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y\right]}_{L(y)=0} = \\ &= c \cdot L(y) = c \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

  Por lo tanto $\overline{y} = cy$ es solución.

□

- Si y_1 & y_2 son soluciones de $L(y)=0$, entonces y_1+y_2 también es solución.

  ▼ Como y_1 & y_2 son soluciónes de $L(y)=0$, entonces:

$$L(y_1)=a_2(x)y_1''+a_1(x)y_1'+a_0(x)y_1=0.$$
$$L(y_2)=a_2(x)y_2''+a_1(x)y_2'+a_0(x)y_2=0.$$

  Al usar en $L(y)$ la función $y=y_1+y_2$, se obtiene:

$$\begin{aligned} L(y_1+y_2) &= a_2(x)(y_1+y_2)''+a_1(x)(y_1+y_2)'+a_0(x)(y_1+y_2)= \\ &= a_2(x)[y_1''+y_2'']+a_1(x)[y_1'+y_2']+a_0(x)[y_1+y_2]= \\ &= \underbrace{[a_2(x)y_1''+a_1(x)y_1'+a_0(x)y_1]}_{L(y_1)=0}+\underbrace{[a_2(x)y_2''+a_1(x)y_2'+a_0(x)y_2]}_{L(y_2)=0}= \\ &= L(y_1)+L(y_2)=0+0=0. \end{aligned}$$

  Por lo tanto y_1+y_2 es solución. □

Podemos resumir las propiedades anteriores como sigue:

- Si $L(y)=0$ y si c es una constante, entonces $L(cy)=cL(y)=0$.
- Si $L(y_1)=0$ y si $L(y_2)=0$, entonces $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)=0$.

Tomando en cuenta lo anterior se cumple lo siguiente:

- Si $L(y_1)=0$ y si $L(y_2)=0$, entonces $L(c_1y_1+c_2y_2)=0$, donde c_1 & c_2 son constantes arbitrarias.

  ▼ En efecto, si $L(y_1)=0$ y si $L(y_2)=0$, entonces:

$$L(c_1y_1+c_2y_2)=L(c_1y_1)+L(c_2y_2)=c_1L(y_1)+c_2L(y_2)=c_1\cdot 0+c_2\cdot 0=0+0=0.$$

□

Ejemplo 4.1.2 *Sea la ecuación diferencial*

$$L(y)=y''+2y'+y=0.$$

Comprobar que $y_1=e^{-x}$, $y_2=xe^{-x}$ & $\overline{y}=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$ *son soluciones de la ED* $L(y)=0$.

▼ Primero comprobamos que $y_1=e^{-x}$ es solución:

$$y_1=e^{-x}\ \Rightarrow\ y_1'=-e^{-x}\ \Rightarrow\ y_1''=e^{-x}.$$

Entonces:

$$L(y_1)=L(e^{-x})=e^{-x}-2e^{-x}+e^{-x}=0.$$

De igual forma, para $y_2=xe^{-x}$:

$$y_2=xe^{-x}\ \Rightarrow\ y_2'=e^{-x}-xe^{-x}\ \Rightarrow\ y_2''=-2e^{-x}+xe^{-x}.$$

Entonces:

$$L(y_2)=L(xe^{-x})=-2e^{-x}+xe^{-x}+2(e^{-x}-xe^{-x})+xe^{-x}=0.$$

Finalmente, para $\overline{y}=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$ se tiene:

$$L(\overline{y})=L(c_1y_1+c_2y_2)=c_1L(e^{-x})+c_2L(xe^{-x})=c_1(0)+c_2(0)=0.$$

Por lo cual, $\overline{y}=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$ es también solución de la ED.

□

4.1.1 Combinaciones lineales

- Dadas dos funciones $y_1 \in \mathfrak{F}$ & $y_2 \in \mathfrak{F}$, se dice que la función

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad \text{donde } c_1 \in \mathbb{R} \;\&\; c_2 \in \mathbb{R} \text{ son constantes arbitrarias,}$$

es una combinación lineal de las funciones y_1 & y_2.

Nótese que en el ejemplo 4.1.2 vimos que las funciones $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$ & $\overline{y} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ son soluciones de

$$L(y) = y'' + 2y' + y = 0.$$

Entonces, por la definición anterior, se puede afirmar que toda combinación lineal de las funciones $y_1 = e^{-x}$ & $y_2 = xe^{-x}$ también es solución de $L(y) = 0$.

- Definimos a la recta generada por una función $f \in \mathfrak{F}$, como el conjunto R_f de todas las combinaciones lineales de esa función, que en este caso es el conjunto de todos los múltiplos de la función:

$$R_f = \left\{ cf \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{F}.$$

Una representación de este concepto:

Estamos dando una representación en analogía con los vectores.

Ejemplo 4.1.3 *La recta generada por la función $f(x) = x^2$ es*

$$R_{x^2} = \left\{ cx^2 \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}.$$

▼ Así las funciones $g(x) = 5x^2$ & $h(x) = -\dfrac{2}{7}x^2$ pertenecen a esta recta.

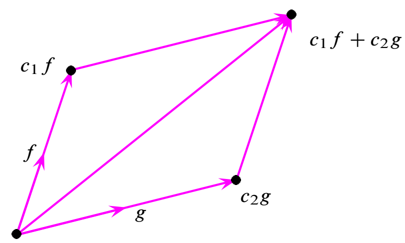
□

- Dos funciones f & g son colineales cuando pertenecen a una misma recta. Esto es, cuando una es un múltiplo de la otra.

- Definimos al plano generado por dos funciones no colineales $y_1 = f(x)$ & $y_2 = g(x)$ como el conjunto $\Pi_{f,g}$ de todas las combinaciones lineales de las funciones:

$$\Pi_{f,g} = \left\{ c_1 f + c_2 g \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{F}.$$

Podemos visualizar este plano como sigue:



Ejemplo 4.1.4 *El plano generado por las funciones* $y_1 = x^2$ & $y_2 = \operatorname{sen} x$ *es*

$$\Pi_{x^2, \operatorname{sen} x} = \left\{ c_1 x^2 + c_2 \operatorname{sen} x \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

▼ Así la función $g(x) = -x^2 + 7 \operatorname{sen} x$ está en este plano, tomando $c_1 = -1$ & $c_2 = 7$.
Igualmente la función $i(x) = 30x^2 - 9 \operatorname{sen} x$ está en el plano, tomando $c_1 = 30$ & $c_2 = -9$.

□

Teorema 4.1 *de Existencia y Unicidad*
Dado el siguiente PVI:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad \text{con } y(x_0) = y_0 \quad \text{y con} \quad y'(x_0) = y_1. \tag{4.2}$$

Si suponemos que $a_2(x) \neq 0$, $a_1(x)$ & $a_0(x)$ *son funciones continuas en un intervalo* I *y si* $x_0 \in I$, *entonces el PVI tiene una solución única* $y(x)$ *para* $x \in I$.

4.1.2 Solución de un problema con condiciones iniciales

Suponiendo que podemos encontrar dos soluciones y_1 & y_2 no colineales de la ED lineal homogénea:

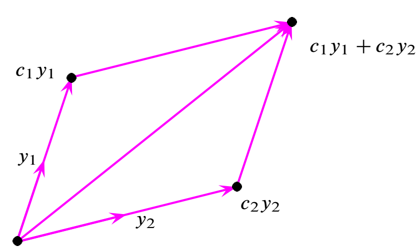
$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

y que generamos con estas dos soluciones el plano:

$$\Pi_{y_1, y_2} = \left\{ c_1 y_1 + c_2 y_2 \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

queremos saber bajo qué condiciones la solución del PVI (4.2) es una función que está en este plano. Es decir, cuándo la solución, que se menciona que existe y es única, es de la forma:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$



Para que esto suceda, dicha solución debe cumplir las condiciones iniciales. Puesto que:

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

De las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0; \\ y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Por lo tanto, para que la solución del PVI (4.2) exista en el plano mencionado, deben existir las constantes c_1 & c_2 que satisfagan el sistema (4.3). Éste es un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas c_1 y c_2. Sabemos que un sistema de este tipo tiene solución única si su determinante es diferente de cero. En este caso, el determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

En consecuencia, para resolver el PVI (4.2), se tienen que encontrar dos soluciones y_1 & y_2 que satisfagan:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.1.3 El wronskiano

- Dadas dos funciones $y_1 \in \mathfrak{F}$ & $y_2 \in \mathfrak{F}$, se define el wronskiano de estas funciones como sigue:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 4.1.5 *Calcular el wronskiano de las funciones* $y_1 = \cos x$ & $y_2 = \operatorname{sen} x$.

▼

$$W(\cos x, \operatorname{sen} x) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ (\cos x)' & (\operatorname{sen} x)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1.$$

□

Con esta nueva definición, podemos afirmar:

- Para resolver el PVI, basta con encontrar dos soluciones y_1 & y_2 de la ecuación diferencial lineal homogénea cuyo wronskiano sea diferente de cero. El conjunto de todas las soluciones es entonces el plano generado por estas funciones. La solución del PVI es un elemento (un vector) de este plano. Por esto, denominamos solución general de la ED a la combinación lineal:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

- Un conjunto de funciones $\{ y_1, y_2 \}$ que cumple con la condición anterior se llama un conjunto fundamental de soluciones.

  Es decir, un conjunto $\{ y_1, y_2 \}$ será un conjunto fundamental de soluciones si:

  1. Cada y_i es solución de la ED.
  2. y_1 & y_2 no son colineales.

Ejemplo 4.1.6 *Encontrar la solución general de la ED:*

$$y'' + y = 0.$$

▼ Es fácil ver que las funciones $y_1 = \cos x$ & $y_2 = \operatorname{sen} x$ son soluciones de la ED. Por el ejemplo 4.1.5 estas funciones tienen wronskiano no nulo. Por lo tanto la solución general de la ED es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

□