CAPÍTULO

3

Aplicaciones de primer orden

3.3 Crecimiento de poblaciones

En esta sección veremos dos modelos de ED que sirven para representar la forma en que evoluciona el número $P(t)$ de habitantes de una determinada población conforme pasa el tiempo $t \geq 0$. Es evidente que dicho número $P(t)$ varía con el tiempo, pues en todas las poblaciones se cumple el ciclo biológico nacimiento-crecimiento-reproducción-muerte, sin importar la especie que observemos (pueden ser bacterias, hongos, conejos, animales en peligro de extinción, poblaciones humanas de lugares de todo el mundo...). Lo que más afecta a $P(t)$ son los nacimientos y las muertes, aunque otros fenómenos como la migración (que no consideraremos aquí) también lo afectan.
Vale la pena aclarar que $P(t)$ es un número entero, pues representa la cantidad de habitantes (que denominamos población), pero en los casos que estudiaremos a continuación se considera como una función real de variable real, ya que sólo así podemos hacer un modelo con ED.

3.3.1 Modelo de Malthus

Fue al parecer Euler quien desarrolló los primeros modelos de población, pero comúnmente se atribuye a Malthus [2] el desarrollo y análisis del primer modelo de evolución de $P(t)$, según el cual

$$P'(t) = kP(t). \tag{3.1}$$

Es decir, en cada instante la rapidez de cambio de la población es proporcional al total de la población presente. Por ejemplo, si $P(t) > 0$ y $P(t)$ creciente, esto implica que $k > 0$.
Resolvemos la ecuación diferencial (3.1):

$$\frac{dP}{dt} = kP \;\Rightarrow\; \frac{dP}{P} = k\,dt\,.$$

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 9/ 2010

2. Thomas Malthus $(1776-1834)$ fue un economista inglés, considerado el fundador de la demografía. Es muy famoso por su publicación *Ensayo sobre el principio de la población* (1798) en la cual concluía que la población humana crece de manera exponencial, mientras que la producción total de alimentos crece en forma lineal, pronosticando un futuro sombrío para la población. Afortunadamente su predicción no se ha cumplido. Sus ideas tuvieron alguna influencia en la teoría de la evolución de Darwin.

Integrando se tiene:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt \;\Rightarrow\; \ln P = kt + C_1 \;\Rightarrow\; P = e^{kt+C_1} = e^{kt}e^{C_1} = e^{kt}C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(t) = Ce^{kt}.$$

Ésta es la solución general de la ecuación diferencial (3.1).
Es común conocer la población inicial, $P(0) = P_0$. Con esto podemos calcular la constante C:

$$P(0) = P_0 = Ce^{k\cdot 0} = C \;\Rightarrow C = P_0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(t) = P_0 e^{kt}.$$

Para calcular k es necesario conocer la cantidad de población existente en un tiempo $t_1 > t_0$, digamos $P(t_1) = P_1$:

$$P(t_1) = P_1 = P_0 e^{kt_1} \;\Rightarrow \frac{P_1}{P_0} = e^{kt_1} \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = kt_1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow k = \frac{\ln P_1 - \ln P_0}{t_1}.$$

Observaciones:

1. Si t_d es el tiempo en el que la población se duplica, $P(t_d) = 2P_0$; entonces tenemos, de acuerdo con la ecuación previa:

$$P(t_d) = 2\cancel{P_0} = \cancel{P_0}e^{kt_d} \;\Rightarrow\; 2 = e^{kt_d} \;\Rightarrow\; \ln 2 = kt_d.$$

Y ahora:

$$k = \frac{\ln 2}{t_d} \quad \& \quad t_d = \frac{\ln 2}{k}. \tag{3.2}$$

Lo anterior indica que el tiempo para que una población se duplique no depende de la cantidad inicial de la misma.

2. Si se proporcionan $P(t_1) = P_1$ & $P(t_2) = P_2$ para dos tiempos $t_1 < t_2$, obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} P(t_1) &= P_1 = Ce^{kt_1}, \\ P(t_2) &= P_2 = Ce^{kt_2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Para resolver este sistema de dos ecuaciones con dos incognitas, C y k, dividimos la segunda ecuación entre la primera y obtenemos:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{Ce^{kt_2}}{Ce^{kt_1}} = \frac{e^{kt_2}}{e^{kt_1}} = e^{k(t_2-t_1)}.$$

Entonces:

$$\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = k(t_2 - t_1).$$

De donde:

$$k = \frac{\ln P_2 - \ln P_1}{t_2 - t_1}. \tag{3.4}$$

Tenemos también, usando (3.3) que $C = P_1 e^{-kt_1}$. Como $P(t) = Ce^{kt}$:

$$P(t) = P_1 e^{k(t-t_1)};$$

con k dado por (3.4).

3. Hemos mencionado que la derivada $\dfrac{dP}{dt}$ es la rapidez de cambio de la población $P(t)$. A esta derivada también se le denomina tasa de cambio de la población. De aquí surge una expresión frecuentemente usada en los problemas de población: tasa de crecimiento.

   La tasa de crecimiento de una población en cierto tiempo t se define como la razón $\dfrac{P'(t)}{P(t)}$ y se da comúnmente en términos porcentuales anuales. Es decir, la tasa de crecimiento de una población es precisamente la constante de proporcionalidad $k = \dfrac{P'(t)}{P(t)}$. Recuérdese que $P'(t) = kP(t)$.

4. Así como $P(t) = P_0e^{kt}$ nos sirve para calcular la población creciente de una comunidad, es posible utilizarla para calcular una población que disminuye al paso del tiempo. Sólo debemos tener presente que:

   a. Si la población $P(t)$ aumenta, entonces $\dfrac{d}{dt}P(t) = kP(t)$, con $k > 0$.

   b. Si la población $P(t)$ disminuye, entonces $\dfrac{d}{dt}P(t) = kP(t)$, con $k < 0$.

Ejemplo 3.3.1 *En un cultivo de bacterias, se estimó que inicialmente había* 150 *bacterias y* 200 *después de una hora (h). Suponiendo una rapidez de crecimiento proporcional a la cantidad de bacterias presente, determinar:*

1. *La cantidad de bacterias después de t horas.*
2. *La cantidad de bacterias depués de* 2 *h.*
3. *El tiempo que debe transcurrir para que la población se triplique.*

▼

1. Si $P(t)$ es la cantidad de bacterias presentes después de t horas, entonces $P(0) = P_0 = 150$ y $P(1) = P_1 = 200$. Luego, $P(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$P'(t) = kP(t), \quad \text{con} \quad P(0) = 150 \text{ y además } P(1) = 200.$$

   Puesto que $P(t) = Ce^{kt}$, se tiene:

$$\begin{aligned} &P(0) = 150 \Rightarrow Ce^0 = 150 \Rightarrow C = 150 \Rightarrow P(t) = 150e^{kt}. \\ &P(1) = 200 \Rightarrow 150e^k = 200 \Rightarrow e^k = \frac{200}{150} = \frac{4}{3} \Rightarrow k = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.2877 \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow P(t) = 150e^{0.2877t}, \end{aligned}$$

   que es la solución del PVI y es la cantidad de bacterias depués de t horas.

2. La cantidad de bacterias después de 2 h es

$$\begin{aligned} &P(2) = 150e^{(0.2877)(2)} \approx 266.6666; \\ &P(2) \approx 267 \text{ bacterias.} \end{aligned}$$

3. Para que la población se triplique:

$$\begin{aligned} &P(t) = 3P_0 \Rightarrow \cancel{150}e^{0.2877t} = 3(\cancel{150}) \Rightarrow e^{0.2877t} = 3 \Rightarrow 0.287682t = \ln(3) \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow t = \frac{\ln(3)}{0.2877} \approx 3.8186 \text{ h} \Rightarrow t \approx 3 \text{ horas, 49 minutos, 7 segundos.} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.3.2 *Cierta población de bacterias tiene una rapidez de cambio proporcional a sí misma. Si en una* 1 *h tuvo un crecimiento del* 50 *por ciento:*

1. *¿Cuál es la población después de t horas?*
2. *¿En cuánto tiempo se duplicará la población?*
3. *¿Cuánto habrá aumentado la población en* 10 *h?*

▼

1. Sea $P(t)$ la población total de bacterias después de t h. Como no se dice la población inicial, suponemos que ésta es P_0 y, debido a que la población creció un 50% en 1 h, entonces:

$$P(1) = P_0 + 0.5P_0 = 1.5P_0.$$

Por lo tanto, $P(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$P'(t) = kP(t), \text{ con } P(0) = P_0 \text{ y además } P(1) = 1.5P_0.$$

Sabemos que $P(t) = P_0e^{kt}$, entonces:

$$P(1) = 1.5P_0 \Rightarrow \cancel{P_0}e^k = 1.5\cancel{P_0} \Rightarrow e^k = 1.5 \Rightarrow k = \ln(1.5) \approx 0.4055 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(t) = P_0e^{0.4055t}.$$

que es la solución del PVI que da la población de bacterias después de t horas.

2. Para conocer cuándo se duplica la población:

$$P(t) = 2P_0 \Rightarrow \cancel{P_0}e^{0.4055t} = 2\cancel{P_0} \Rightarrow e^{0.4055t} = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0.4055t = \ln(2) \Rightarrow t = \frac{\ln(2)}{0.4055} \approx 1.7094 \text{ h}.$$

Hallamos que la población se duplicará en

$$t \approx 1 \text{ hora, 42 minutos, 33 segundos.}$$

3. La población después de 10 h es

$$P(10) = P_0e^{(0.4055)(10)} = P_0e^{4.054} = 57.685P_0.$$

Por lo tanto, en 10 h la población habrá aumentado a 57.685 veces la población inicial.

□

Ejemplo 3.3.3 *Si la población de cierta comunidad crece al* 2% *anual ¿Cuántos años deben transcurrir para que la población se duplique?*

▼ Aquí, el 2% anual mencionado es precisamente la tasa de crecimiento de población. Se tiene entonces que $k = 2\% = 0.02$. Además, por la primera observación, el tiempo para que una población se duplique está dado por:

$$t_d = \frac{\ln 2}{k}.$$

Luego,

$$t_d = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{0.02} \approx 34.6574 \text{ años} \Rightarrow t_d \approx 34 \text{ años, 240 días.}$$

□

Ejercicios 3.3.1 *Modelo de Malthus.* *Soluciones en la página 6*

1. La población de una comunidad aumenta con una rapidez proporcional a sí misma. Si la población inicial es de 2 000 y aumenta 10% en 5 años:
   a. ¿Cuál será la población en t años?
   b. ¿Qué porcentaje habrá aumentado en 10 años?
   c. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la población sea de 20 000 personas?
2. La población de una comunidad aumenta con una rapidez proporcional a sí misma. Si la población se duplicó en 20 años, ¿en cuántos años se triplicará?
3. La población de cierta especie de animales aumenta 5% anual. ¿En cuánto tiempo se duplica la población?
4. La población de cierta especie de animales aumenta 10% anual. ¿En cuánto tiempo se triplica la población ?
5. Experimentalmente se sabe que la población de cierta bacteria se duplica cada 30 h. ¿Cuál es la tasa de crecimiento por día?

Ejercicios 3.3.1 *Modelo de Malthus.* *Página 5*

1. a. $P(t) = 2\,000e^{0.01906\,t}$;
   b. 21%;
   c. $t \approx 120$ años, 295 días.
2. $t \approx 31$ años, 254 días.
3. $t \approx 13$ años, 315 días.
4. $t \approx 10$ años, 360 días.
5. $k = 55.45\%$ diario.