CAPÍTULO

3

Aplicaciones de primer orden

3.2.1 Modelo logístico

El modelo de Malthus tiene muchas limitaciones. Por ejemplo, predice que una población crecerá exponencialmente con el tiempo, que no ocurre en la realidad. Si la especie considerada dispone de todos los medios para vivir, como espacio, aire, alimento, entonces su crecimiento será de tipo exponencial; pero si los recursos escasean, entonces habrá competencia para acceder a ellos (peleas, guerras a veces, supervivencia de los más fuertes...) y la razón de crecimiento no será la misma. Por esta razón al modelo de Malthus se le llama de crecimiento irrestricto, mientras que el modelo presentado a continuación se denomina modelo de crecimiento con restricciones.

El modelo llamado de crecimiento logístico, fue introducido por Pierre François Verhulst en 1838 y supone que la razón de crecimiento es proporcional conjuntamente tanto a la población misma como a la cantidad faltante para llegar a la máxima población sustentable. Escribiremos dicho modelo como

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right). \tag{3.1}$$

En este modelo el número r se conoce como la razón de crecimiento intrínseco, y K es la capacidad sustentable que es el máximo valor que puede tener P. El valor de r depende sólo de la especie considerada, mientras que K depende tanto de la especie como del ambiente en donde se desarrolla ésta y es el máximo valor posible en ese ambiente.

Advierta que, si el valor de P es muy pequeño comparado con K, entonces $1 - \dfrac{P}{K}$ es ≈ 1 y la ED (3.1) es semejante a la de Malthus. Por otro lado, si P se aproxima a K entonces $1 - \dfrac{P}{K} \approx 0$ y esto haría que $\dfrac{dP}{dt} \approx 0$; en consecuencia la población $P(t)$ sería casi constante.

Resolvamos la ED. Observemos que es separable:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \;\Rightarrow\; \frac{dP}{P\left(1 - \dfrac{P}{K}\right)} = r\,dt \;\Rightarrow\; \int \frac{dP}{P\left(1 - \dfrac{P}{K}\right)} = rt + C.$$

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 9/ 2010

La integral del primer miembro se resuelve mediante fracciones parciales:

$$\frac{1}{P\left(1-\dfrac{P}{K}\right)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{1-\dfrac{P}{K}} \Rightarrow A\left(1-\frac{P}{K}\right) + BP = 1 \Rightarrow \left(B-\frac{A}{K}\right)P + A = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 1 \quad \& \quad B - \frac{A}{K} = 0 \Rightarrow A = 1 \quad \& \quad B = \frac{1}{K}.$$

Luego,

$$\int \frac{dP}{P\left(1-\dfrac{P}{K}\right)} = \int \left[\frac{1}{P} + \frac{\dfrac{1}{K}}{1-\dfrac{P}{K}}\right] dP = \ln P + \frac{1}{K}\int \frac{dP}{1-\dfrac{P}{K}} = \ln P - \ln|\,K-P\,|.$$

Ahora, si se toma en consideración que $P < K$, se tiene que $|\,K-P\,| = K-P$, por lo cual:

$$\ln\left(\frac{P}{K-P}\right) = rt + C \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{K-P} = Ce^{rt}.$$

Antes de despejar P, usemos la condición inicial $P(0) = P_0$, para determinar C:

$$\frac{P_0}{K-P_0} = Ce^0 = C \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{K-P} = \frac{P_0}{K-P_0}e^{rt}.$$

Ahora despejamos P, denotando por comodidad $\dfrac{P_0}{K-P_0} = C$:

$$\frac{P}{K-P} = Ce^{rt} \Rightarrow P = (K-P)Ce^{rt} = KCe^{rt} - PCe^{rt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P + PCe^{rt} = KCe^{rt} \Rightarrow P = \frac{KCe^{rt}}{1+Ce^{rt}}.$$

Para simplificar esta fórmula, dividimos numerador y denominador entre Ce^{rt} para obtener finalmente:

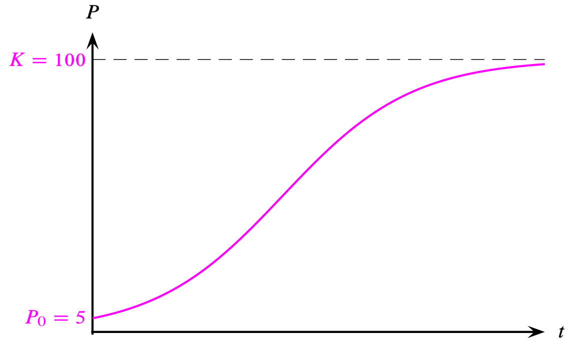
$$P(t) = \frac{K}{\dfrac{1}{Ce^{rt}}+1} = \frac{K}{1+\left(\dfrac{K-P_0}{P_0}\right)e^{-rt}}. \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.2.1 *Utilizando un modelo logístico con capacidad sustentable $K = 100\times 10^9$, una población mundial (humana) de 5×10^9 en 1986 y una razón de crecimiento de 2 % anual, hacer una predicción de la población mundial para el año 2010. ¿Cuándo será esta población de 32×10^9? Los datos provistos son aproximaciones de los datos observados en la realidad.*

▼ En este ejemplo tenemos $K = 100$, $P_0 = 5$ (en miles de millones de habitantes del planeta) en 1986 y $r = 0.02$. La solución de la ecuación logística $\dfrac{dP}{dt} = rP\left(1-\dfrac{P}{K}\right)$ es, de acuerdo con la ecuación (3.2), como sigue:

$$P(t) = \frac{K}{1+\left(\dfrac{K-P_0}{P_0}\right)e^{-rt}} = \frac{100}{1+\left(\dfrac{100-5}{5}\right)e^{-0.02t}} = \frac{100}{1+19e^{-0.02t}},$$

en miles de millones de habitantes.



En el año 2010 tendremos $t = 24$; entonces:

$$P(24) = \frac{100}{1 + 19e^{-(0.02)(24)}} = \frac{100}{1 + 19e^{-0.48}} \approx 7\,838\,904\,588 \text{ habitantes.}$$

La población será de 32×10^9 en el tiempo t_1 que determinamos, como sigue:

$$P(t_1) = \frac{100}{1 + 19e^{-0.02t_1}} = 32 \Rightarrow 100 = 32 + 608e^{-0.02t_1} \Rightarrow 608e^{-0.02t_1} = 68 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-0.02t_1} = \frac{68}{608} \Rightarrow -0.02t_1 = \ln\left(\frac{68}{608}\right) \Rightarrow t_1 = \frac{\ln\left(\frac{68}{608}\right)}{-0.02} \approx 109.5334 \text{ años.}$$

Esto es, a mediados del año 2095. Esto, claro está, si las tendencias se mantienen; afortunadamente, la razón de crecimiento $r = 0.02$ no es una constante y, con el tiempo, en muchos países ha estado disminuyendo; entre otros aspectos gracias a la planificación familiar.

□

Ejemplo 3.2.2 *Las reservas pesqueras del halibut (especie de gran tamaño, parecida al lenguado) en el Pacífico se modelan con la ED logística con capacidad sustentable de 80.5×10^6, medida en kg (biomasa), y razón de crecimiento intrínseco de 0.71 por año. Si la biomasa inicial es la cuarta parte de la capacidad sustentable, encontrar la biomasa después de un año y el tiempo que debe pasar para que la biomasa inicial se duplique, es decir, que llegue a la mitad de la capacidad sustentable.*

▼ El PVI por resolver es

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \text{ con } r = 0.71, \quad K = 80.5 \times 10^6 \text{kg de biomasa}, \quad P_0 = \frac{K}{4}.$$

Observe que ahora $P(t)$ no es el número de habitantes de la población sino la biomasa al tiempo t, es decir, la masa total de los peces de la especie halibut en el Pacífico. No repetiremos el proceso de resolución de la ED, sino que escribiremos directamente su solución (3.2):

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right)e^{-rt}} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - K/4}{K/4}\right)e^{-rt}} = \frac{K}{1 + 3e^{-rt}} = \frac{80.5 \times 10^6}{1 + 3e^{-0.71t}}.$$

Al cabo de un año la biomasa será

$$P(1) = \frac{80.5 \times 10^6}{1 + 3e^{-0.71}} = 32\,526\,138.39 \text{ kg.}$$

El tiempo necesario para duplicar la biomasa inicial se determina de la siguiente manera:

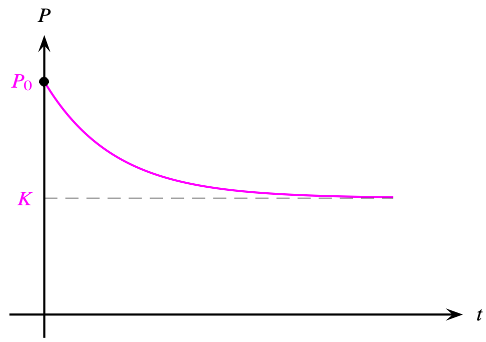
$$P(t_d) = \frac{\cancel{K}}{1 + 3e^{-0.71t}} = \frac{1}{2}\cancel{K} \Rightarrow \frac{1}{1 + 3e^{-0.71t_d}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + 3e^{-0.71t_d} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3e^{-0.71t_d} = 1 \Rightarrow -0.71t_d = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow t_d = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-0.71} \approx 1.54734 \text{ años,}$$

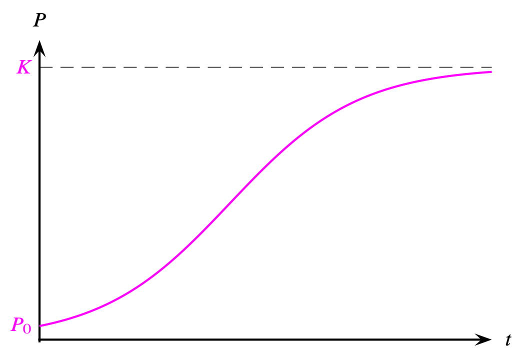
o sea, 1 año, 6 meses y 17 días aproximadamente.

□

Finalizamos esta sección con algunas observaciones sobre la solución de la ecuación logística. Primero hay que subrayar que en las situaciones de interés se tiene $P_0 < K$, pues no es muy realista suponer que la población inicial sea mayor que la capacidad sustentable. En el caso extremo $P_0 > K$, se tiene que $\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$ es negativa, es decir, la población decrece hasta llegar (asintóticamente), según el modelo, a K.



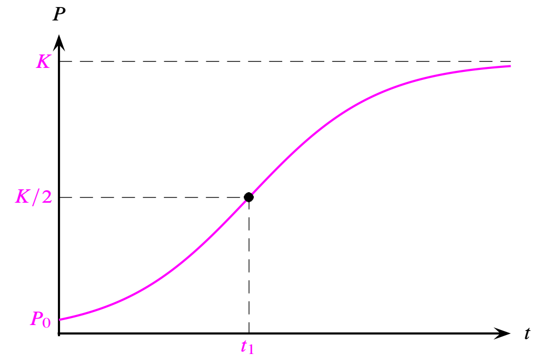
En la situación más común en que $P_0 < K$, la derivada $\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$ es positiva, o sea que, la función $P(t)$ será siempre creciente y tenderá asintóticamente hacia K cuando $t \to \infty$:



La forma típica de la curva solución, llamada curva logística, es la de una letra S alargada, como se ilustra en la figura de arriba. Es interesante observar que hay un cambio en la curvatura de $P(t)$, que es justamente un punto de inflexión. Demostraremos a continuación que la inflexión ocurre precisamente cuando $P(t) = \frac{K}{2}$. Para ello, sólo tenemos que encontrar la segunda derivada e igualar a cero:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left[rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\right] = rP'\left(1 - \frac{P}{K}\right) - \frac{r}{K}P'P = rP' - rP'\frac{P}{K} - \frac{r}{K}P'P = \\ &= rP' - 2rP'\frac{P}{K} = rP'\left(1 - \frac{2P}{K}\right) = 0 \ \Rightarrow \ rP' = 0 \ \text{ o bien } \ 1 - \frac{2P}{K} = 0;\end{aligned}$$

pero $rP' = 0$ no puede ser, pues ya hemos visto que $P' = \frac{dP}{dt} > 0$ siempre, así que debe darse la segunda opción: $1 - \frac{2P}{K} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{2P}{K} = 1 \ \Rightarrow \ P = \frac{K}{2}$. El tiempo t_1 en que ocurre el punto de inflexión dependerá de los parámetros P_0 y r, pero la coordenada vertical es siempre la misma $\frac{K}{2}$.



Se puede comprobar también que, en el punto de inflexión, la razón de crecimiento $\dfrac{dP}{dt}$ es máxima (ver los ejercicios).

Los modelos presentados y discutidos en esta sección son los que han demostrado ser de mayor utilidad por dar predicciones con una aproximación bastante razonable en la práctica. Sin embargo es pertinente aclarar que las predicciones obtenidas con ellos pueden contener errores por no tomar en cuenta todas las variables que afectan al proceso. Así sucedió con Malthus, quien, con el modelo de crecimiento exponencial, predijo en 1798 una catástrofe que en realidad nunca sucedió, pues él no tomó en cuenta los adelantos en la tecnología agropecuaria y alimenticia que han permitido a la población humana seguir viviendo, sin problemas, casi dos siglos más de lo que predijo.

Ejercicios 3.3.2 *Modelo logístico.* *Soluciones en la página 6*

1. Supongamos que una población satisface a un modelo logístico con $K = 500$, que la población inicial es 100 y que a los 10 años llegó a 200. Determine la razón de crecimiento intrínseco r.

2. La población mundial en 1939 era aproximadamente 2.3×10^9 habitantes y, en 2009, se estimó en 6.7×10^9 habitantes. Algunos especialistas consideran que la capacidad sustentable del planeta es de 11×10^9 habitantes, en condiciones de bienestar (es decir, sin desnutrición ni padecimientos por falta de recursos). Considere $t = 0$ en 1939, $P(0) = 2.3 \times 10^9$ y una capacidad sustentable de 11×10^9.

   Encuentre una fórmula para $P(t)$ con $t \geq 0$, determine P en el año 2020 y el tiempo t_1 en el que habrá 10×10^9 habitantes.

   a. Suponiendo que la población crece a una razón de cambio proporcional a la diferencia entre la población límite máxima L y la población al tiempo t.
   b. Suponiendo un crecimiento logístico de la población.

3. Compruebe que, para una población que satisface al modelo logístico, la máxima razón de crecimiento de la población es $\dfrac{rK}{4}$, y se alcanza cuando el tamaño de la población es $\dfrac{K}{2}$.

4. Para una población que cumple el modelo logístico con r, P_0 y K dados, encuentre el tiempo t_1 para el cual $P(t)$ tiene un punto de inflexión.

Ejercicios 3.3.2 *Modelo logístico.* *Página 5*

1. $r = 0.09808$.
2. a. $P(t) = 11 - 8.7e^{-0.01t}\ (\times 10^9)$;
   $P(81) = 7.15\,(\times 10^9)$;
   $t_1 \approx 215$ años, es decir, en 2154.

   b. $P(t) = \dfrac{11}{1 + 3.7826e^{-0.0255t}}$;
   $P(81) \approx 7.4136\,(\times 10^9)$;
   $t_1 \approx 143$ años, es decir, en 2082.
3. En $P = \dfrac{K}{2}$ hay máximo con valor $\dfrac{rK}{4}$.
4. $t_1 = \dfrac{\ln(K - P_0)}{r} - \dfrac{\ln P_0}{r}$.