CAPÍTULO

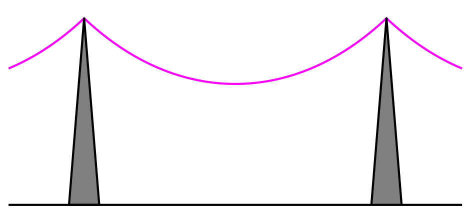
3

Aplicaciones de primer orden

3.8 Miscelánea

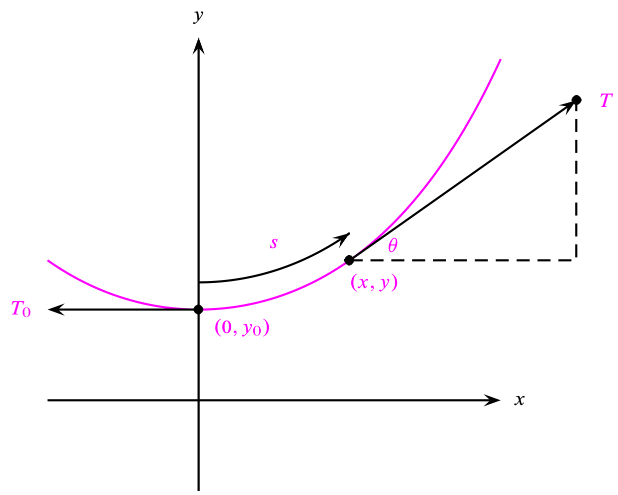
En esta sección presentamos algunos ejemplos adicionales de aplicación de las ED en la solución de problemas variados. Algunos de estos problemas utilizan técnicas ya presentadas anteriormente o generalizaciones de ellas.

Ejemplo 3.8.1 *Encontrar la forma que adopta un cable flexible que se encuentra suspendido entre dos puntos a la misma altura y cuelga por la acción de su propio peso. Ésa es la forma que adoptan por ejemplo los cables de electricidad o los que sostienen puentes colgantes.*



▼ Coloquemos el eje y (eje de las ordenadas) de modo que pase por el punto más bajo de la curva que da la forma de la cadena, en donde la tangente debe ser desde luego horizontal (véase la siguiente figura).

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 9/ 2010



Denotemos por s la longitud de arco medida desde el punto más bajo $(0, y_0)$ a un punto variable (x, y), y mediante $w(s)$ a la densidad lineal de peso de la cadena. Por lo tanto, para conocer el peso de un tramo de la cadena, tenemos que integrar $w(s)\,ds$.

Para obtener la ED de la curva, sólo tenemos que considerar que la porción de cadena entre $(0, y_0)$ y (x, y) está en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas: una es la tensión horizontal T_0 en $(0, y_0)$; la segunda es la tensión variable T en el punto (x, y), que actúa en la dirección tangente debido a la flexibilidad de la cadena; la última es una fuerza hacia abajo igual al peso de la cadena entre esos dos puntos. Si descomponemos T en sus componentes horizontal y vertical, e igualamos las partes correspondientes, obtenemos

$$T\cos\theta = T_0 \quad \text{y} \quad T\operatorname{sen}\theta = \int_0^s w(\alpha)\,d\alpha. \tag{3.1}$$

De la primera ecuación obtenemos entonces:

$$T\operatorname{sen}\theta = T\cos\theta\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = T_0\tan\theta = T_0\frac{dy}{dx}.$$

Por otro lado, utilizando la segunda ecuación en (3.1) en esta última igualdad:

$$T_0\frac{dy}{dx} = \int_0^s w(\alpha)\,d\alpha\,.$$

Por el teorema Fundamental del Cálculo podemos eliminar la integral, al derivar. Usamos también la regla de la Cadena y obtenemos:

$$T_0 y'' = \frac{d}{dx}\int_0^s w(\alpha)\,d\alpha = \frac{d}{ds}\left(\int_0^s w(\alpha)\,d\alpha\right)\frac{ds}{dx} = w(s)\sqrt{1+(y')^2};$$

donde la última igualdad resulta de la fórmula para longitud de arco $s = \int_0^x \sqrt{1+(y')^2}\,dx$.

En conclusión tenemos:

$$T_0 y'' = w(s)\sqrt{1+(y')^2}\,.$$

Ésta es la ED de la curva pedida.

Para poder resolver esta ED necesitamos tener información adicional sobre la densidad lineal $w(s)$. Si suponemos, para simplificar, que esta densidad es constante, digamos w_0, entonces podemos resolver la ED. Si utilizamos $p = \dfrac{w_0}{T_0}$:

$$y'' = \frac{w_0}{T_0}\sqrt{1+[y'(x)]^2} \;\Rightarrow\; y''(x) = p\sqrt{1+[y'(x)]^2}.$$

Por reducción de orden (sección **??**, página **??**), si usamos ahora $v = y'$ & $\dfrac{dv}{dx} = y''$, tenemos la ED separable:

$$\frac{dv}{dx} = p\sqrt{1+v^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = p\,dx.$$

Integrando, obtenemos:

$$\ln(v + \sqrt{1+v^2}) = px + C.$$

Como $v = y' = 0$, cuando $x = 0$, resulta:

$$C + p \cdot 0 = \ln(0 + \sqrt{1+0^2}) = \ln 1 = 0;$$

así que tenemos simplemente:

$$\ln(v + \sqrt{1+v^2}) = px \;\Rightarrow\; v + \sqrt{1+v^2} = e^{px}.$$

Deseamos despejar v:

$$\sqrt{1+v^2} = e^{px} - v \;\Rightarrow\; 1 + v^2 = (e^{px} - v)^2 = e^{2px} - 2e^{px}v + v^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 2e^{px}v = e^{2px} - 1 \;\Rightarrow\; v = \frac{e^{2px}-1}{2e^{px}} = \frac{e^{px} - e^{-px}}{2} = \operatorname{senh}(px).$$

Integrando por último para obtener y, resulta:

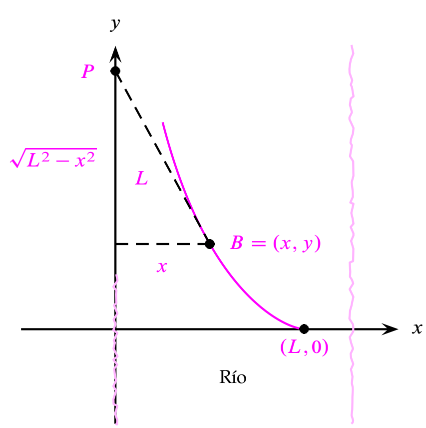
$$y = \int \operatorname{senh}(px)\,dx = \frac{\cosh(ph)}{p} + C.$$

A la curva obtenida, se le llama catenaria, ya que el problema fue planteado originalmente con cadenas.

□

Ejemplo 3.8.2 *Un pescador en la orilla de un río (que podemos suponer recta) empieza a caminar en una dirección a velocidad constante jalando un bote que está flotando en el río mediante una cuerda de longitud L, manteniendo siempre tirante la cuerda. ¿Cuál será la trayectoria del bote? La curva que se obtiene se llama tractriz.*

▼ Si imaginamos estar parados a la orilla del río con el pescador caminando por la misma orilla y alejándonos del lugar en que estamos parados, podemos representar la orilla del río como el eje y y al pescador como un punto P que se mueve en la dirección positiva del eje y partiendo del origen. Mientras que el bote B se encuentra inicialmente en $(L, 0)$ como en la figura siguiente:



Como la cuerda se mantiene tirante siempre, su dirección debe ser tangente a la trayectoria del bote, es decir PB tiene la misma pendiente que la tangente a la curva $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Pero entonces tendremos (colocamos el signo negativo ya que la pendiente es negativa):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x},$$

que es una ED separable; y podemos resolver integrando:

$$dy = -\frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x}\,dx \;\Rightarrow\; y = -\int \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x}\,dx.$$

Usamos $x = L\cos\theta \;\Rightarrow\; dx = -L\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta$.

$$\begin{aligned}
y &= -\int \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x}\,dx = \cancel{-}\int \frac{\sqrt{L^2 - L^2\cos^2\theta}}{\cancel{L}\cos\theta}(\cancel{-}\cancel{L}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta) = \\
&= \int \frac{\sqrt{L^2(1-\cos^2\theta)}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta}{\cos\theta} = L\int \frac{\mathrm{sen}^2\theta\,d\theta}{\cos\theta} = L\int \frac{(1-\cos^2\theta)\,d\theta}{\cos\theta} = \\
&= L\int \frac{d\theta}{\cos\theta} - L\int \cos\theta\,d\theta = L\int \sec\theta\,d\theta - L\,\mathrm{sen}\,\theta = \\
&= L\ln(\sec\theta + \tan\theta) - L\,\mathrm{sen}\,\theta + C = \\
&= L\ln\left(\frac{L}{x} + \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x}\right) - \cancel{L}\frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{\cancel{L}} + C.
\end{aligned}$$

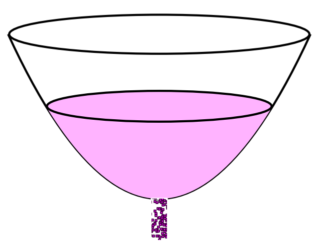
Ahora, usando $y(L) = 0$, obtenemos $C = 0$; por fin:

$$y = L\ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{L^2 - x^2}.$$

□

Flujo de agua bajo gravedad

Según la ley de Torricelli, el agua que escapa de un depósito con un pequeño orificio en el fondo sale a una velocidad igual a la que habría adquirido si hubiese caído libremente desde el nivel (superior) del agua hasta el orificio.

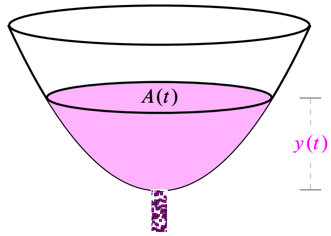


Si el área del orificio inferior es a, entonces en el intervalo de tiempo dt, el agua que escapa por el orificio recorre una distancia o altura $v\,dt$, por lo que el volumen que escapa en ese intervalo será

$$\text{área de la base} \times \text{altura} = av\,dt,$$

para ese cilindro formado de agua. Por otra parte, si $y(t)$ denota la profundidad (o altura) del agua sobre el orificio y si $A(t)$ es el área de la sección transversal horizontal del depósito de agua a la altura $y(t)$, entonces la variación del volumen de agua (dV) dentro del depósito será

$$dV = A(y)\,dy,$$



O sea, que en el intervalo de tiempo dt, el volumen que se escapa del depósito es

$$dV = A(y)\,dy = -av\,dt.$$

El signo es negativo porque el volumen en el depósito va decreciendo; obtenemos entonces, al dividir entre dt y tomar límites,

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -av.$$

En esta ED aparecen tres variables, altura, velocidad y tiempo. La ley de Torricelli nos permite eliminar v, pues ésta viene dada como la velocidad en caída libre desde una altura y, y podemos simplemente igualar las energías cinética y potencial: $\dfrac{v^2}{2} = gy$ para despejar $v = \sqrt{2gy}$, donde g es la constante gravitacional. Así obtenemos, finalmente:

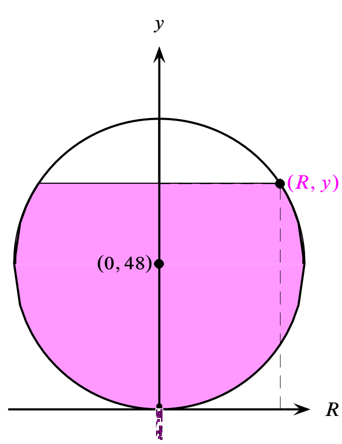
$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}.$$

Ejemplo 3.8.3 *Si a un depósito de forma esférica con un radio de* 4 *pies que se encuentra completamente lleno se le perfora un agujero circular en el fondo de una pulgada de radio y no hay más flujos de entrada o salida, ¿cuánto tiempo se requiere para que se vacíe?*

▼ Recordemos que 1 pie $= 12''$, así que el depósito tiene un radio de $48''$ y el orificio un radio de $1''$, luego $a = \pi(1)^2$ pulgadas^2.

Para determinar $A(y)$ consideremos un círculo en el plano Ry con radio $48''$ y centro en $(0, 48)$, de modo que la R, que corresponde a la altura y, se obtiene de la ecuación

$$R^2 + (y-48)^2 = 48^2 \;\Rightarrow\; R^2 + y^2 - 96y + 48^2 = 48^2 \;\Rightarrow\; R^2 = 96y - y^2.$$



Éste valor de R es el que corresponde a la altura y del agua sobre el orificio, y la correspondiente área para la ED es $A(y) = \pi R^2 = \pi(96y - y^2)$, de donde

$$\pi(96y - y^2)\frac{dy}{dt} = -\pi\sqrt{2gy} \Rightarrow (y^2 - 96y)\frac{dy}{dt} = \sqrt{2gy} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{y^2 - 96y}{\sqrt{y}}\,dy = \sqrt{2g}\,dt \Rightarrow \int (y^{\frac{3}{2}} - 96y^{\frac{1}{2}})\,dy = \int \sqrt{2g}\,dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - 96\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2g}t + C.$$

Cuando $t = 0$, teníamos $y = 96$, de modo que

$$C = \frac{2}{5}(96)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(96)^{\frac{5}{2}} = -24\,079.46 \Rightarrow y^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{5}y - 64\right) = \sqrt{2g}t - 24,079.46\,.$$

Por fin, buscamos el tiempo t para el cual $y = 0$ cuando se cumpla

$$\sqrt{2g}t - 24\,079.46 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{24\,079.46}{\sqrt{2g}}.$$

Como y estaba en pulgadas, debemos convertir $C = 24\,079.46$ a pies y usar además $g = 32$ pie/s, así que

$$t = \frac{24\,079.46/12}{\sqrt{2\cdot 32}} = \frac{2\,006.62}{\sqrt{64}} = 250.83 \text{ s (aproximadamente 4 min y 11 s).}$$

□

Ejemplo 3.8.4 *En un colegio que cuenta con* 130 *alumnos se detecta en cierto día un brote de influenza que afecta a* 20 *niños. Por recomendación de las autoridades sanitarias se fija el siguiente criterio: si en* 5 *días a partir de la detección, se presentan* 20 *casos más, entonces la escuela se debe declarar en cuarentena. Pasados* 2 *días desde que se detectó el virus,* 5 *niños más presentan la enfermedad. Suponga que la enfermedad se propaga de forma directamente proporcional al número de niños sanos y enfermos, y además que se trata de un sistema aislado, es decir, considere que la población total permanece constante y que todos los niños se encuentran en contacto unos con otros. ¿Será necesario que la escuela declare estado de cuarentena?*

▼ Denotemos por $E(t)$ al número de niños enfermos al tiempo t. Como la población total del colegio es de 130 niños, entonces el número de niños sanos es $130 - E(t)$. La suposición de que la enfermedad se propaga en forma proporcional al número de niños sanos y enfermos nos da la ED:

$$\frac{dE}{dt} = aE(130 - E).$$

De los datos tenemos además que $E(0) = 20$ y $E(2) = 25$, con t medido en días. La forma de esta ED es la del método logístico con el máximo de E que es 130; entonces:

$$\frac{dE}{dt} = rE\left(1 - \frac{E}{130}\right),$$

para $r = 130a$. De acuerdo a lo visto en la sección **??**, la solución de esta ecuación es

$$E(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k - P_0}{P_0}\right)e^{-rt}} = \frac{130}{1 + \left(\frac{130 - 20}{20}\right)e^{-rt}} = \frac{130}{1 + 5.5e^{-rt}}\,.$$

Dado que $E(2) = 25$, tenemos:

$$25 = \frac{130}{1 + 5.5e^{-2r}} \Rightarrow 25 + 137.5e^{-2r} = 130 \Rightarrow 137.5e^{-2r} = 105 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2r = \ln\left(\frac{105}{137.5}\right) \Rightarrow r = \frac{\ln\left(\frac{105}{137.5}\right)}{-2} \approx 0.1348 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E(t) = \frac{130}{1 + 5.5e^{-0.1348t}}.$$

Para ver si es necesario declarar cuarentena, calculamos $E(5) = \dfrac{130}{1 + 5.5e^{-(0.1348)(5)}} \approx 34.18$. Como no se ha llegado a la cifra crítica de 40 enfermos en 5 días, no es necesario declarar estado de cuarentena. Modelos similares a éste se pueden usar para modelar el esparcimiento de rumores en una población.

□

Ejercicios 3.8.1 *Miscelánea.* *Soluciones en la página 9*

1. Una bola de naftalina pierde masa por evaporación con una rapidez proporcional a su área superficial instantánea. Si la mitad de la masa se pierde en 100 días (d), ¿cuánto tiempo se necesita para que el radio disminuya a la mitad de su valor inicial?; ¿cuánto tiempo pasará hasta que la bola desaparezca por completo?

   Considere que el volumen y área superficial de una esfera de radio r son $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ y $S = 4\pi r^2$, respectivamente.

2. El gerente de una empresa de 5 000 trabajadores se encuentra en el extranjero cuando le señalan que un rumor sobre el cierre de ésta se propaga entre sus empleados. Se le informa que, hasta entonces, aproximadamente 200 trabajadores lo han escuchado (y creído). El gerente requiere 10 d más para arreglar sus asuntos y le informan al cabo de 3 d que el rumor ha sido oído por 400 personas. Suponga que la tasa de cambio de las personas que han oído el rumor es proporcional al número de las que lo han oído y al de las que no lo han oído, y que el gerente tomará la decisión de regresar a la empresa para aclarar la situación sólo si el rumor es oído por 900 empleados al cabo de los 7 d desde el día en el que él conoció la información. ¿Qué le recomendaría al gerente?, ¿suspender su viaje o continuarlo?

3. a. Un depósito en forma de cilindro circular recto con radio de 2 pies y altura de 6 pies tiene un orificio circular de una pulgada de radio en el fondo. Si se encuentra inicialmente lleno de agua, determinar el tiempo que tardará en vaciarse por completo.
   b. Misma pregunta para un depósito de forma cónica con el vértice hacia abajo, con radio máximo de 5 pies, altura de 10 pies y el orificio en el fondo de 2 pulgadas de radio.

4. Para anestesiar a una persona con un peso de 50 kg se requiere que la concentración de anestesia en su cuerpo sea por lo menos de 45 mg/kg. Suponga que el medicamento se elimina de la corriente sanguínea en forma exponencial con una vida media de 5 h. ¿Qué dosis debe ser administrada para tener anestesiada a esta persona al menos una hora?

5. Una embarcación viaja en dirección N a una velocidad constante v_0. En cierto instante la embarcación es avistada por un barco pirata ubicado en la dirección E a una distancia de L km, y éste le dispara un torpedo que viaja con una rapidez constante igual al doble de la primera embarcación. Suponga que el torpedo disparado desde $(L, 0)$, al momento inicial, tiene un dispositivo que ubica la posición de la embarcación en todo instante t y modifica su propio curso para perseguir a la embarcación. Proporcionar una ED que modele la trayectoria del torpedo, determinar dicha trayectoria, el punto en que el torpedo alcanzará a la embarcación y el tiempo recorrido del torpedo.

6. El lago de Chapala tiene un volumen de 8 km^3 y los flujos de entrada y salida se producen a razón de 5.1 km^3/año. Suponga que al tiempo $t = 0$ (años) su concentración de contaminantes es 0.0005 kg/m^3

y posteriormente la concentración de contaminantes que ingresa al agua es 0.0001 kg/m^3. Suponiendo también que el agua se mezcle perfectamente dentro del lago, ¿cuánto tiempo pasará para que la concentración de contaminantes en el lago se reduzca al 0.0002 kg/m^3?

Ejercicios 3.8.1 *Miscelánea.* *Página 7*

1. a. 242.366 días;
   b. 484.732 días.
2. ≈ 941, se recomienda que suspenda su viaje.
3. a. $t = 352.7265$ s;
   b. $t = 142.3$ s.
4. 2 584.5 mg de anestesia.
5. $y = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{L}} - \sqrt{Lx} + \dfrac{2}{3}L$; $\left(0, \dfrac{2}{3}L\right)$;
6. 2.1746 años.