CAPÍTULO

3

Aplicaciones de ED de primer orden

3.2 Decaimiento radioactivo

Si observamos cierta cantidad inicial de sustancia o material radioactivo, al paso del tiempo se puede verificar un cambio en la cantidad de dicho material; la cantidad M del material es una función del tiempo t, esto es $M = M(t)$. Aún más, dadas las características de los materiales radioactivos, al paso del tiempo ocurre una desintegración o decaimiento del material. Esto no quiere decir que el material desaparezca, sino que la configuración interna de sus átomos cambia y dejan de ser radioactivos.
Experimentalmente se ha llegado al conocimiento de que, en cualquier tiempo $t \geq 0$, la rapidez de cambio de la cantidad $M(t)$ de material radioactivo es directamente proporcional a la cantidad de material presente. Simbólicamente esto se expresa así:

$$\frac{d}{dt}M(t) \propto M(t);$$

donde $\frac{d}{dt}M(t)$ es la rapidez de cambio de $M(t)$ y el símbolo $\propto$ denota la proporcionalidad existente entre la cantidad presente $M(t)$ del material radioactivo y su rapidez de cambio.
Se afirma entonces que

$$\frac{dM(t)}{dt} = kM(t); \tag{3.1}$$

donde k es la llamada constante de proporcionalidad. Debido a la desintegración, la cantidad $M(t)$ de material radioactivo va disminuyendo (decreciendo) al paso del tiempo t, por lo tanto se tiene que $\frac{d}{dt}M(t) < 0$, lo que nos permite concluir que $k < 0$ ya que $M(t) \geq 0$.

Esta ecuación diferencial (3.1) representa el modelo matemático por resolver y es de variables separables. En efecto:

$$\frac{dM}{dt} = kM \;\Rightarrow\; \frac{dM}{M} = k\,dt\,.$$

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 9/ 2010

Integrando se tiene:

$$\int \frac{dM}{M} = \int k\,dt \;\Rightarrow\; \ln M = kt + C \;\Rightarrow\; M = e^{kt+C} = e^{kt}e^{C} = e^{kt}C.$$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial (3.1) es

$$M(t) = Ce^{kt}.$$

Es común conocer la cantidad (inicial) de material existente en $t = 0$, lo que se expresa por $M(0) = M_0$. Con esto podemos calcular la constante C:

$$M(0) = M_0 = Ce^{k\cdot 0} = C \;\Rightarrow\; C = M_0.$$

Entonces se tiene:

$$M(t) = M_0 e^{kt}.$$

De esta última expresión observemos que se puede calcular k si se conoce la cantidad de material existente en un tiempo $t_1 > 0$, digamos $M(t_1) = M_1 < M_0$:

$$M(t_1) = M_1 = M_0 e^{kt_1} \;\Rightarrow\; \frac{M_1}{M_0} = e^{kt_1} \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{M_1}{M_0}\right) = kt_1.$$

Así concluimos que

$$k = \frac{\ln M_1 - \ln M_0}{t_1}.$$

Observaciones:

1. Un caso particular ocurre cuando $M(t_1) = \dfrac{M_0}{2}$. Esto es, se conoce el tiempo que transcurre para que la cantidad de material inicial decaiga la mitad. Este tiempo se conoce como *la vida media* del material radioactivo. Denotaremos con t_m a este tiempo. En este caso:

$$M(t_m) = \frac{\cancel{M_0}}{2} = \cancel{M_0} e^{kt_m} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} = e^{kt_m} \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{1}{2}\right) = kt_m.$$

   Entonces $kt_m = -\ln 2$, de donde podemos despejar por igual:

$$k = \frac{-\ln 2}{t_m} \quad \& \quad t_m = \frac{-\ln 2}{k}. \tag{3.2}$$

   Además, en vista de lo anterior podemos afirmar que la vida media de un material no depende de la cantidad inicial del mismo.

2. Si se proporcionan $M(t_1) = M_1$ & $M(t_2) = M_2$ para dos tiempos $t_1 < t_2$, obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} M(t_1) &= M_1 = Ce^{kt_1}, \\ M(t_2) &= M_2 = Ce^{kt_2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

   Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas, C y k. Para resolverlo podemos dividir la segunda ecuación entre la primera y así obtenemos:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{Ce^{kt_2}}{Ce^{kt_1}} = \frac{e^{kt_2}}{e^{kt_1}} = e^{k(t_2-t_1)} \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{M_2}{M_1}\right) = k(t_2 - t_1).$$

   Despejamos k:

$$k = \frac{\ln M_2 - \ln M_1}{t_2 - t_1}. \tag{3.4}$$

Además, tenemos también de (3.3):

$$M_1 = Ce^{kt_1} \;\Rightarrow\; C = M_1 e^{-kt_1}.$$

Por lo tanto, al sustituir en $M(t) = Ce^{kt}$:

$$M(t) = M_1 e^{k(t-t_1)},$$

en donce k es el valor obtenido en (3.4).

Ejemplo 3.2.1 *Se sabe que un material radioactivo se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si inicialmente hay* 100 *mg de material y, después de dos años, se observa que el* 5% *de la masa original se desintegró, determinar:*

1. *Una expresión para la masa al momento* t.
2. *El tiempo necesario para que se desintegre el* 10% *de la masa original.*

▼ Si $M(t)$ es la cantidad presente (en miligramos) de material radioactivo al cabo de t años, entonces $M(t)$ está dada por la solución del PVI

$$M' = kM(t), \text{ con } M(0) = 100 \text{ y además } M(2) = 95.$$

1. Tenemos que $M_0 = 100$ mg.
   Por otro lado, considerando que $M(t) = M_0 e^{kt} = 100e^{kt}$ se tiene, para $t = 2$:

   $$M(2) = 100 - 5 = 95 = 100e^{2k} \;\Rightarrow\; 0.95 = e^{2k} \;\Rightarrow\; \ln 0.95 = 2k \;\Rightarrow\; k = \frac{\ln 0.95}{2} = -0.02564\,.$$

   Entonces la expresión solicitada es

   $$M(t) = 100e^{-0.02564t}.$$

2. Cuando se desintegra el 10% de la masa quedan 90 mg de la misma, entonces:

   $$90 = 100e^{-0.02565t} \;\Rightarrow\; \ln 0.9 = -0.02565t \;\Rightarrow\; t = \frac{\ln 0.9}{-0.02565} = 4.1076 \text{ años},$$

   representa el tiempo para que se desintegre el 10% de la masa original.

□

Ejemplo 3.2.2 *Un material radioactivo se desintegra dos tercios en* 1 000 *años. Determinar su vida media.*

▼ Suponemos que se cumple con el modelo de desintegración de esta sección y por lo tanto $M(t) = M_0 e^{kt}$. Si pierde dos tercios de material en 1 000 años, entonces:

$$M(1\,000) = \frac{\cancel{M_0}}{3} = \cancel{M_0}e^{1\,000k} \;\Rightarrow\; \frac{1}{3} = e^{1\,000k} \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{1}{3}\right) = 1\,000k \;\Rightarrow\; k = \frac{-\ln 3}{1\,000} = -0.0010986\,.$$

Podemos calcular ya la vida media, usando (3.2):

$$t_m = \frac{-\ln 2}{k} = \frac{-\ln 2}{-0.0010986} = 630.92 \text{ años}.$$

□

Ejemplo 3.2.3 *Se ha detectado que el 0.5% de una sustancia radioactiva desaparece en 12 años.*

1. *¿Qué porcentaje desaparecerá en 1 000 años?*
2. *¿Cuál es la vida media de dicha sustancia?*

▼ La cantidad de sustancia al cabo de t años está dada por $M(t) = M_0e^{kt}$, donde M_0 es la cantidad inicial de sustancia. Además:

$$M(12) = 0.995\cancel{M_0} = \cancel{M_0}e^{12k} \Rightarrow 0.995 = e^{12k} \Rightarrow \ln 0.995 = 12k \Rightarrow k = \frac{\ln 0.995}{12} = -0.0004177\,.$$

1. Sea p el porcentaje que queda de la sustancia radioactiva después de 1 000 años. Entonces:

$$M(1\,000) = pM_0 = M_0e^{1\,000k} \Rightarrow p = e^{1\,000k} = e^{1\,000(-0.0004177)} = 0.65856\,.$$

   Este resultado indica que a los 1 000 años quedará el 65.856% de la sustancia radioactiva original, es decir, desaparecerá 34.144% de dicha sustancia.

2. Para hallar la vida media usamos el valor de k previamente calculado:

$$t_m = \frac{-\ln 2}{k} = \frac{-\ln 2}{-0.0004177} = 1\,659.44 \text{ años.} = 1\,660 \text{ años.}$$

□

En el siguiente ejemplo se muestra una aplicación importante de las ED en arqueología.

El elemento carbono, presente en todos los compuestos orgánicos, tiene un isótopo radioactivo, llamado carbono 14 (^{14}C). El porcentaje de ^{14}C con respecto al carbono en los organismos vivos permanece constante y, cuando éste muere, el ^{14}C decae en la forma que hemos visto. Así que, si sabemos cuánto ^{14}C ha perdido una parte de un organismo, podremos encontrar el tiempo transcurrido a partir de su muerte.
Para ello sólo basta saber que el ^{14}C radiactivo tiene una vida media aproximada de 5 600 años.

Ejemplo 3.2.4 *Se encontraron huesos fósiles de un animal. Se analizaron y se detectó que cada hueso contenía una centésima parte del ^{14}C radioactivo. Determinar la antigüedad aproximada de los huesos encontrados.*

▼ Supongamos que $M(t)$ es la cantidad presente de ^{14}C en cada hueso al cabo de t años y que M_0 es la cantidad original (inicial) de dicha sustancia radioactiva en cada hueso. $M(t)$ está determinada por la solución del PVI:

$$M'(t) = kM(t), \quad \text{con} \quad M(0) = M_0 \text{ y además } M(5\,600) = \frac{1}{2}M_0.$$

La solución general de la ecuación diferencial es $M(t) = Ce^{kt}$, donde $C = M_0$. Ahora,

$$M(5\,600) = \frac{1}{2}M_0 \Rightarrow \cancel{M_0}e^{k(5\,600)} = \frac{1}{2}\cancel{M_0} \Rightarrow e^{5\,600k} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5\,600k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k = \frac{-\ln 2}{5\,600} = -0.000123776\,.$$

Luego,

$$k = -(1.23776)10^{-4}.$$

Por lo que

$$M(t) = M_0e^{-(1.23776)10^{-4}t}.$$

Ahora bien, considerando que cada hueso contenía una centésima parte del ^{14}C radioactivo original, se tiene que

$$M(t) = \frac{1}{100}M_0 \Rightarrow \cancel{M_0}e^{-(1.23776)10^{-4}t} = \frac{1}{100}\cancel{M_0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-(1.23776)10^{-4}t} = \frac{1}{100} \Rightarrow -(1.23776)10^{-4}t = \ln\left(\frac{1}{100}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = \frac{-\ln 100}{-(1.23776)10^{-4}} = \frac{\ln 100}{1.23776}(10)^4 = 37\,205.6795\,.$$

Por lo tanto, la antigüedad (edad) aproximada de los huesos es

$$t = 37\,206 \text{ años.}$$

$\square$

Ejercicios 3.2.1 *Decaimiento radioactivo.* *Soluciones en la página 6*

En los ejercicios siguientes suponga que la rapidez de decrecimiento es directamente proporcional a la cantidad presente de sustancia radioactiva.

1. Si el 5% de una sustancia radioactiva se descompone en 50 años:
   a. ¿Qué porcentaje habrá al final de 500 años?
   b. ¿Y después de 1 000 años?
   c. ¿Cuál es la vida media de esta sustancia?
2. Si la vida media de una sustancia radiactiva es de 1 800 años:
   a. ¿Qué porcentaje estará presente al final de 100 años?
   b. ¿En cuántos años quedará el 10% de la sustancia?
3. Un año después de la producción de cierta sustancia radioactiva, se tenían 100 g de ésta y dos años después 75 g; ¿cuánto se produjo inicialmente?; ¿cuál es la vida media de la sustancia?
4. Una muestra extraída de un cráneo antiguo contenía solamente una sexta parte del ^{14}C original. ¿Cuál es la antigüedad del cráneo?
5. Calcular la vida media de una sustancia radioactiva que en 10 años decae un 25%.
6. Un análisis de restos fósiles de un animal demostró que éstos contenían sólo el 6.24 % del ^{14}C original. Determinar la antigüedad aproximada de la muerte del animal.
7. Los neutrones en una pila atómica crecen a una razón proporcional al número de neutrones presente en cualquier instante (debido a la fisión nuclear). Si inicialmente hay N_0 neutrones y luego se tienen N_1 y N_2 neutrones presentes en los instantes t_1 y t_2, respectivamente, mostrar que

$$\left(\frac{N_2}{N_0}\right)^{t_1} = \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{t_2}.$$

8. El uranio se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si M_1 y M_2 gramos están presentes en los instantes t_1 y t_2, respectivamente, mostrar que la vida media del uranio es

$$t_m = \frac{(t_2 - t_1)(\ln 2)}{\ln M_1 - \ln M_2}.$$

Ejercicios 3.2.1 *Decaimiento radioactivo.* *Página 5*

1. a. 59.9%;

   b. 35.8%;

   c. 675 años, 212 días.

2. a. 96.22%;

   b. 5 980 años, 270 días.

3. a. $M_0 = 133.333$ g;

   b. 2 años, 150 días.

4. 14 475 años.

5. $t_m \approx 24$ años, 34 días.

6. 22 412 años, 126 días.

7. Mostrar.

8. Mostrar.