CAPÍTULO

2

Métodos de solución de ED de primer orden

2.1 Introducción

En este capítulo presentamos los métodos para resolver analíticamente ED de primer orden y PVI de los tipos más comunes que se usan en las aplicaciones prácticas. Los métodos vienen acompañados por pruebas o criterios que nos permitirán identificar una ED como perteneciente a uno de esos tipos, junto con un procedimiento de solución. Encontraremos también procedimientos mediante los cuales es posible transformar una ED en uno de esos tipos.

- Recordemos que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una relación entre y', y & x (la variable independiente) de la forma:

$$F(x, y, y') = 0\,,$$

donde F es una función de tres variables.

Ejemplo 2.1.1 *Las siguientes expresiones matemáticas son ejemplos de ED ordinarias de primer orden:*

▼

1. $5y(y')^3 - 2xyy' - 4\operatorname{sen} x = 0$.
2. $(7x - y^2)y' = e^{x^2} - 2$.
3. $y\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + 6x^2 = 3x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5$.
4. $(y')^2 = (2x + y)(y')$.

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 9/ 2010

5. $6y' = \dfrac{y+4}{x}$.
6. $(x+y)\,dx + (\tan x^2 - xy)\,dy = 0$.

$\square$

- En este libro encontraremos, en algunos casos, ED en las cuales es posible despejar y', es decir:

$$y' = f(x,y)\,.$$

Estas ecuaciones diferenciales se dice que están en forma normal.

Ejemplo 2.1.2 *Despejar y' de la siguiente ecuación diferencial:* $(3xy)y' - \sqrt{x^2-y^2} = 5y'$.

▼ Realizando un poco de álgebra se obtiene

$$y' = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{3xy-5}, \quad \text{siempre y cuando } 3xy-5 \neq 0.$$

De aquí identificamos:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{3xy-5}.$$

$\square$

- Recordemos que otra forma de presentación para las ecuaciones diferenciales es la siguiente:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0\,. \tag{2.1}$$

Si deseamos despejar una derivada de esta expresión, bien se puede considerar a x como la variable independiente y despejar $\dfrac{dy}{dx}$; o bien se puede considerar a y como la variable independiente y despejar $\dfrac{dx}{dy}$.

1. Considerando a x como la variable independiente:

$$\begin{aligned}
M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \;\Rightarrow\; M(x,y)\,dx &= -N(x,y)\,dy \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; M(x,y) = -N(x,y)\,\frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} &= -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = y' = f(x,y) &= -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}, \text{ con la condición } N(x,y) \neq 0\,.
\end{aligned}$$

2. Considerando a y como la variable independiente:

$$\begin{aligned}
M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \;\Rightarrow\; M(x,y)\,dx &= -N(x,y)\,dy \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; M(x,y)\,\frac{dx}{dy} = -N(x,y) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dy} &= -\frac{N(x,y)}{M(x,y)} \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; \frac{dx}{dy} = x' = g(x,y) &= -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}, \text{ con la condición } M(x,y) \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Se puede observar que $\quad y' \cdot x' = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy} = \left[-\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}\right]\left[-\dfrac{N(x,y)}{M(x,y)}\right] = 1.$

Ejemplo 2.1.3 *Sea la ecuación diferencial:* $(3x^2y - xy^2)\,dx + (2xy - 3x^2y^2)\,dy = 0.$

1. *Considerando a x como la variable independiente, despejar* $\dfrac{dy}{dx}$.
2. *Considerando a y como la variable independiente, despejar* $\dfrac{dx}{dy}$.

▼

1. Considerado a x como la variable independiente:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y - xy^2}{2xy - 3x^2y^2} = -\frac{\cancel{(xy)}(3x - y)}{\cancel{(xy)}(2 - 3xy)} = -\frac{3x - y}{2 - 3xy},$$

excepto los puntos que están en la hipérbola $2 - 3xy = 0$ y en los ejes x $(y = 0)$ & y $(x = 0)$.

2. Considerado a y como la variable independiente:

$$x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{2xy - 3x^2y^2}{3x^2y - xy^2} = -\frac{\cancel{(xy)}(2 - 3xy)}{\cancel{(xy)}(3x - y)} = -\frac{2 - 3xy}{3x - y},$$

excepto los puntos que están en la recta $3x - y = 0$ y en los ejes x & y.

De nuevo, vemos que $\quad y' \cdot x' = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy} = \left[-\dfrac{3x - y}{2 - 3xy}\right]\left[-\dfrac{2 - 3xy}{3x - y}\right] = 1.$

□

Ejemplo 2.1.4 *Sea la ecuación diferencial* $(2s^4 - 9ts)\,ds + (s^2 - 3ts)\,dt = 0.$

1. *Considerando a s como la variable independiente, despejar* $\dfrac{dt}{ds}$.
2. *Considerando a t como la variable independiente, despejar* $\dfrac{ds}{dt}$.

▼

1. Considerado a s como la variable independiente:

$$t' = \frac{dt}{ds} = -\frac{2s^4 - 9ts}{s^2 - 3ts} = -\frac{\cancel{(s)}(2s^3 - 9t)}{\cancel{(s)}(s - 3t)} = -\frac{2s^3 - 9t}{s - 3t},$$

excepto los puntos que están en la recta $s - 3t = 0$ y en el eje $t (s = 0)$.

2. Considerado a t como la variable independiente:

$$s' = \frac{ds}{dt} = -\frac{s^2 - 3ts}{2s^4 - 9ts} = -\frac{\cancel{(s)}(s - 3t)}{\cancel{(s)}(2s^3 - 9t)} = -\frac{s - 3t}{2s^3 - 9t},$$

excepto los puntos que están en la curva $2s^3 - 9t = 0$ y en el eje $t(s = 0)$.

□

Recordemos que la derivada $s'(t)$ es la razón de cambio instantánea de la función $s(t)$. Si $s(t)$ es la posición de un objeto con respecto al tiempo, entonces $s'(t)$ representa la velocidad instantánea de dicho objeto. Así también $s'(t_0)$ se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $s(t)$ en el punto $[t_0, s(t_0)]$. Este concepto, que se ha visto en el curso de Cálculo Diferencial, nos permitirá trabajar en el siguiente capítulo sobre problemas de crecimiento de poblaciones, mezclas, caída libre, decaimiento radioactivo, aplicaciones geométricas, entre otros, en los cuales se requiere encontrar las soluciones de una ED de primer orden.
A continuación se exponen las técnicas más conocidas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, ecuaciones que se requieren para resolver las aplicaciones anteriormente mencionadas.