CAPÍTULO

2

Métodos de solución de ED de primer orden

2.10 Sobre funciones de dos variables

2.10.1 Definiciones básicas

Una función real de dos variables reales es una regla de correspondencia f que a cada pareja de números reales (x, y) en un conjunto D_f del plano, llamado el dominio de f, le asocia un único número real z. Aquí z es la imagen de (x, y) bajo la acción de f y es denotado por $z = f(x, y)$.

En este caso, el dominio de la función f es

$$D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, z = f(x, y) \in \mathbb{R} \right\},$$

y el rango de la función f es

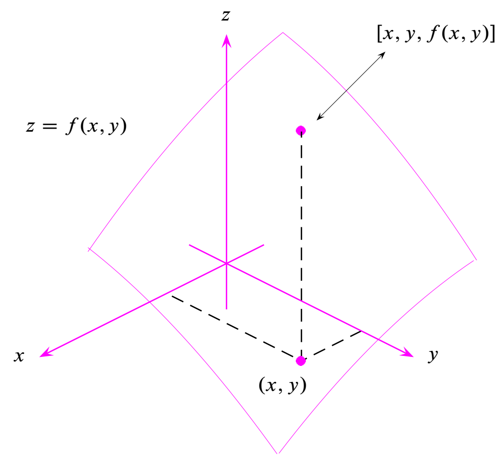
$$R_f = \left\{ z \in \mathbb{R} \,\middle|\, z = f(x, y) \text{ para algún } (x, y) \in D_f \right\}.$$

Observación. El dominio D_f es un subconjunto del plano cartesiano xy, esto es, $D_f \subset \mathbb{R}^2$ y el rango R_f está contenido en $\mathbb{R}$, es decir, $R_f \subset \mathbb{R}$.

En consecuencia, la gráfica G_f de la función f está contenida en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, ya que

$$G_f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x, y) \in D_f \;\&\; z = f(x, y) \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 9/ 2010



Es importante resaltar que, si se tiene una función definida mediante la fórmula $z = f(x, y)$, entonces $f(a, b)$ se obtiene utilizando a en vez de x; y utilizando b en vez de y en dicha fórmula.

Ejemplo 2.10.1 *Sea la función* $f(x, y) = x^2 - y^2$. *Obtener:*

1. *Su dominio.*
2. $f(2, 3)$.
3. $f(-4, 1)$.
4. $f\left(1, \dfrac{2}{3}\right)$.
5. $f(a + 1, a - 1)$.
6. $f(2a, 3a)$.
7. $f(3x, 3y)$.
8. $f(yx, ty)$.
9. $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$.
10. $f\left(\dfrac{x}{y}, 1\right)$.

▼

1. Su dominio $D_f = \mathbb{R}^2$, ya que $x^2 - y^2 \in \mathbb{R}$ para cada $x \in \mathbb{R}$ & $y \in \mathbb{R}$, esto es, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $f(2, 3) = 2^2 - 3^2 = 4 - 9 = -5$.
3. $f(-4, 1) = (-4)^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$.
4. $f\left(1, \dfrac{2}{3}\right) = 1^2 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.
5. $f(a + 1, a - 1) = (a + 1)^2 - (a - 1)^2 = (a^2 + 2a + 1) - (a^2 - 2a + 1) = 4a$.
6. $f(2a, 3a) = (2a)^2 - (3a)^2 = 4a^2 - 9a^2 = -5a^2$.
7. $f(3x, 3y) = (3x)^2 - (3y)^2 = 9x^2 - 9y^2 = 9(x^2 - y^2) = 9f(x, y)$.
8. $f(tx, ty) = (tx)^2 - (ty)^2 = t^2x^2 - t^2y^2 = t^2(x^2 - y^2) = t^2 f(x, y)$.
9. $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = 1^2 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = 1 - \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} f(x, y)$.
10. $f\left(\dfrac{x}{y}, 1\right) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 1^2 = \dfrac{x^2}{y^2} - 1 = \dfrac{x^2 - y^2}{y^2} = \dfrac{1}{y^2} f(x, y)$.

□

Ejemplo 2.10.2 *Sea la función* $g(x, y) = \dfrac{x + 2y}{y - 2x}$. *Obtener:*

1. *Su dominio.*
2. $g(1, 3)$.
3. $g\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.
4. $g(1 - a, a + 1)$.
5. $g(3a, 2a)$.
6. $g(tx, ty)$.
7. $g\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$.
8. $g\left(\dfrac{x}{y}, 1\right)$.
9. $g(x, c)$.
10. $g(c, y)$.

▼

1. Su dominio es todo el plano xy excepto la recta $y = 2x$, es decir:
$$D_g = \mathbb{R}^2 - \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y - 2x = 0 \right\} = \mathbb{R}^2 - \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = 2x \right\}.$$
2. $g(1, 3) = \dfrac{1 + 2(3)}{3 - 2(1)} = \dfrac{1 + 6}{3 - 2} = \dfrac{7}{1} = 7.$
3. $g\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-\dfrac{3}{2} + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{1}{2} - 2\left(-\dfrac{3}{2}\right)} = \dfrac{-\dfrac{3}{2} + 1}{\dfrac{1}{2} + 3} = \dfrac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{7}{2}} = -\dfrac{1}{7}.$
4. $g(1 - a, a + 1) = \dfrac{(1 - a) + 2(a + 1)}{(a + 1) - 2(1 - a)} = \dfrac{1 - a + 2a + 2}{a + 1 - 2 + 2a} = \dfrac{a + 3}{3a - 1}.$
5. $g(3a, 2a) = \dfrac{(3a) + 2(2a)}{(2a) - 2(3a)} = \dfrac{3a + 4a}{2a - 6a} = \dfrac{7\cancel{a}}{-4\cancel{a}} = -\dfrac{7}{4}.$
6. $g(tx, ty) = \dfrac{(tx) + 2(ty)}{(ty) - 2(tx)} = \dfrac{\cancel{t}(x + 2y)}{\cancel{t}(y - 2x)} = \dfrac{x + 2y}{y - 2x} = g(x, y).$
7. $g\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1 + 2\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\dfrac{y}{x} - 2(1)} = \dfrac{\dfrac{x + 2y}{\cancel{x}}}{\dfrac{y - 2x}{\cancel{x}}} = \dfrac{x + 2y}{y - 2x} = g(x, y).$
8. $g\left(\dfrac{x}{y}, 1\right) = \dfrac{\dfrac{x}{y} + 2(1)}{1 - 2\left(\dfrac{x}{y}\right)} = \dfrac{\dfrac{x + 2y}{\cancel{y}}}{\dfrac{y - 2x}{\cancel{y}}} = \dfrac{x + 2y}{y - 2x} = g(x, y).$
9. $g(x, c) = \dfrac{x + 2c}{c - 2x}$, que es función de x para c constante.
10. $g(c, y) = \dfrac{c + 2y}{y - 2c}$, que es función de y para c constante.

□

Ejemplo 2.10.3 *Sea la función* $h(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. *Obtener:*

1. *Su dominio.*
2. $h(0, 0)$.
3. $h(-3, 0)$.
4. $h(0, 4)$.
5. $h(3, -4)$.
6. $h(-1, 2)$.
7. $h(2a, 3a)$.
8. $h(tx, ty)$.

9. $h\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$.
10. $h\left(\dfrac{x}{y}, 1\right)$.
11. $h(x, c)$.
12. $h(c, y)$.

▼

1. Su dominio es el interior y frontera del círculo de radio 5 y centro en el origen
$$D_h = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 25 - x^2 - y^2 \geq 0 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 5^2 \right\}.$$
2. $h(0, 0) = \sqrt{25 - 0^2 - 0^2} = \sqrt{25} = 5\,.$
3. $h(-3, 0) = \sqrt{25 - (-3)^2 - 0^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4\,.$
4. $h(0, 4) = \sqrt{25 - 0^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3\,.$
5. $h(3, -4) = \sqrt{25 - 3^2 - (-4)^2} = \sqrt{25 - 9 - 16} = \sqrt{0} = 0\,.$
6. $h(-1, 2) = \sqrt{25 - (-1)^2 - 2^2} = \sqrt{25 - 1 - 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,.$
7. $h(2a, 3a) = \sqrt{25 - (2a)^2 - (3a)^2} = \sqrt{25 - 4a^2 - 9a^2} = \sqrt{25 - 13a^2}\,.$
8. $h(tx, ty) = \sqrt{25 - (tx)^2 - (ty)^2} = \sqrt{25 - t^2x^2 - t^2y^2} = \sqrt{25 - t^2(x^2 + y^2)}\,.$
9. $h\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = \sqrt{25 - 1^2 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \sqrt{24 - \dfrac{y^2}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{24x^2 - y^2}{x^2}}\,.$
10. $h\left(\dfrac{x}{y}, 1\right) = \sqrt{25 - \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{24 - \dfrac{x^2}{y^2}} = \sqrt{\dfrac{24y^2 - x^2}{y^2}}\,.$
11. $h(x, c) = \sqrt{25 - x^2 - c^2} = \phi(x)$, para c constante.
12. $h(c, y) = \sqrt{25 - c^2 - y^2} = \phi(y)$, para c constante.

□

Ejercicios 2.10.1 *Definiciones básicas.* *Soluciones en la página 16*

1. Para la función $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^3$, obtener:
   a. $f(2, 3)$.
   b. $f(-1, 1)$.
   c. $f(a, a)$.
   d. $f(tx, tx)$.
   e. $f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.
   f. $f(1, 0)$.
   g. $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$.
   h. $x^3 f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$.
   i. $f\left(\dfrac{x}{y}, 1\right)$.
   j. $y^3 f\left(\dfrac{x}{y}, 1\right)$.
2. Para la función $g(x, y) = \dfrac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$, obtener:
   a. $g(3, -4)$.
   b. $g(4, -3)$.
   c. $g(tx, tx)$.
   d. $g(1, a)$.
   e. $g\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$, $x > 0$.
3. Para la función $h(x, y) = \dfrac{x + ye^{y/x}}{xe^{y/x}}$, obtener:

a. $h(1,0)$.
b. $h(a,a)$.
c. $h(-1,0)$.
d. $h(y,x)$.
e. $h(tx,ty)$.

4. Para la función $\phi(t,u) = \dfrac{u}{t}(\ln u - \ln t)$, obtener:

a. $\phi(1,1)$.
b. $\phi(a,a)$.
c. $\phi(rt,ru)$.
d. $\phi\left(1,\dfrac{u}{t}\right)$.
e. $\phi\left(\dfrac{t}{u},1\right)$.

5. Para la función $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy-x^2}$, obtener:

a. $f(2,1)$.
b. $f(a,-a)$.
c. $f(tx,ty)$.
d. $f(1,a)$.
e. $f(a,1)$.
f. $f(ty,tx)$.
g. $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$.
h. $f\left(\dfrac{x}{y},1\right)$.

2.10.2 Derivadas parciales

En el curso de Cálculo de una Variable, la derivada de una función $u = \phi(t)$ se definió de la siguiente forma:

$$\phi'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\phi(t+\Delta t)-\phi(t)}{\Delta t},$$

cuando el límite existe.
Recordemos que para calcular este límite:

Primero se incrementa la variable independiente t en una cantidad $h = \Delta t$.

A continuación se obtiene el incremento de la variable dependiente u mediante

$$\Delta u = \phi(t+\Delta t) - \phi(t).$$

Luego se obtiene la razón de incrementos $\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$.

Finalmente se calcula $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}$ (cuando el límite existe), que es precisamente la derivada $\phi'(t)$ denotada también por $\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{du}{dt} = \phi'(t) = u'(t)$.

En una función de dos variables $z = f(x,y)$ se define la derivada de manera análoga:

- La derivada parcial de f con respecto a x:

$$f_x = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}.$$

- La derivada parcial de f con respecto a y:

$$f_y = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}.$$

Otras notaciones para estas derivadas parciales son

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \& \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Interpretamos estas definiciones diciendo lo siguiente:

1. En la derivada parcial de f con respecto a x se incrementa en h solamente a la variable independiente x para luego obtener el incremento de la variable dependiente z mediante $\Delta z = f(x+h, y) - f(x, y)$ y finalmente calcular (cuando el límite existe):

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = f_x\,.$$

   Notamos que la variable independiente y se mantiene fija. La variable y no es incrementada.

2. En la derivada parcial de f con respecto a y se incrementa en h solamente a la variable independiente y para luego obtener el incremento de la variable dependiente z mediante $\Delta z = f(x, y+h) - f(x, y)$ y finalmente calcular (cuando el límite existe):

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = f_y\,.$$

   Observación. La variable independiente x se mantiene fija. La variable x no es incrementada.

Podemos concluir que:

1. Al calcular la derivada parcial f_x, de f con respecto a x, la variable y se considera como constante.
2. Al calcular la derivada parcial f_y, de f con respecto a y, la variable x se considera como constante.

Ejemplo 2.10.4 *Calcular las derivadas parciales de la función* $f(x, y) = 2x^5 - 3x^3y^2 + 4y^3 - 5$.

▼

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^5 - 3x^3y^2 + 4y^3 - 5) = 2\frac{\partial}{\partial x}(x^5) - 3y^2\frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(4y^3 - 5) = \\ &= 2(5x^4) - 3y^2(3x^2) + 0 = 10x^4 - 9x^2y^2\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^5 - 3x^3y^2 + 4y^3 - 5) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^5) - 3x^3\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + 4\frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(-5) = \\ &= 0 - 3x^3(2y) + 4(3y^2) - 0 = -6x^3y + 12y^2\,. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.10.5 *Calcular las derivadas parciales de la función* $g(x, y) = x^2y^3e^{xy}$.

▼

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3e^{xy}) = (x^2y^3)\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{xy}\right) + e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3) = \\ &= x^2y^3e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}(xy) + e^{xy}y^3\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = \\ &= x^2y^3e^{xy}y\cdot 1 + e^{xy}y^3\cdot 2x = e^{xy}(x^2y^4 + 2xy^3)\,. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_y &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3e^{xy}) = (x^2y^3)\left(\frac{\partial}{\partial y}e^{xy}\right) + e^{xy}\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3) = \\
&= x^2y^3e^{xy}\frac{\partial}{\partial y}(xy) + e^{xy}x^2\frac{\partial}{\partial y}(y^3) = \\
&= x^2y^3e^{xy}x\cdot 1 + e^{xy}x^2\cdot 3y^2 = e^{xy}(x^3y^3 + 3x^2y^2)\,.
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.10.6 *Calcular las derivadas parciales de la función* $w(t,u) = \left(\dfrac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right)^{10}$.

▼

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right)^{10} = 10\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right)^{10-1}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right) = \\
&= 10\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right)^{9}\cdot\frac{(t^2+u^2)\frac{\partial}{\partial t}(t^2-u^2) - (t^2-u^2)\frac{\partial}{\partial t}(t^2+u^2)}{(t^2+u^2)^2} = \\
&= 10\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right)^{9}\cdot\frac{(t^2+u^2)(2t-0) - (t^2-u^2)(2t+0)}{(t^2+u^2)^2} = \\
&= 10\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right)^{9}\cdot\frac{2t^3+2tu^2-2t^3+2tu^2}{(t^2+u^2)^2} = \\
&= 10\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right)^{9}\cdot\frac{4tu^2}{(t^2+u^2)^2} = \frac{40tu^2(t^2-u^2)^9}{(t^2+u^2)^{11}}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right)^{10} = 10\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right)^{10-1}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right) = \\
&= 10\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right)^{9}\cdot\frac{(t^2+u^2)\frac{\partial}{\partial u}(t^2-u^2) - (t^2-u^2)\frac{\partial}{\partial u}(t^2+u^2)}{(t^2+u^2)^2} = \\
&= 10\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right)^{9}\cdot\frac{(t^2+u^2)(0-2u) - (t^2-u^2)(0+2u)}{(t^2+u^2)^2} = \\
&= 10\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right)^{9}\cdot\frac{-2t^2u-2u^3-2t^2u+2u^3}{(t^2+u^2)^2} = \\
&= 10\left(\frac{t^2-u^2}{t^2+u^2}\right)^{9}\cdot\frac{-4t^2u}{(t^2+u^2)^2} = \frac{-40t^2u(t^2-u^2)^9}{(t^2+u^2)^{11}}\,.
\end{aligned}
$$

□

Ejercicios 2.10.2 *Derivadas parciales.* *Soluciones en la página 16*
Calcular las derivadas parciales de las funciones siguientes:

1. $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y^2 - 5y^4 + 6$.
2. $g(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - e^y \cos x$.
3. $z = \dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^2}$.
4. $w = t^2u^3e^{t^2u^3}$.
5. $h(x,y) = x\tan(x^2+y^2) - y\sec(x^2+y^2)$.

2.10.3 Diferencial exacta o total

- Se define la diferencial exacta o total de una función $z = f(x, y)$ como
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\,,$$
o bien
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\,.$$

Ejemplo 2.10.7 *Obtener la diferencial exacta o total de la función* $f(x, y) = e^{xy^2}$.

▼ La derivada parcial de f con respecto a x es
$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy^2}) = e^{xy^2}\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = e^{xy^2}y^2 \cdot 1 = y^2e^{xy^2}\,.$$
La derivada parcial de f con respecto a y es
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy^2}) = e^{xy^2}\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = e^{xy^2}x \cdot 2y = 2xye^{xy^2}\,.$$
La diferencial exacta o total de f es
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = y^2e^{xy^2}\,dx + 2xye^{xy^2}\,dy\,.$$

□

Ejemplo 2.10.8 *Obtener la diferencial exacta de la función* $g(t, u) = \operatorname{sen}\frac{t}{u}$.

▼ La derivada parcial de g con respecto a t es
$$g_t = \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\operatorname{sen}\frac{t}{u}\Big) = \Big(\cos\frac{t}{u}\Big)\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{u}\Big) = \Big(\cos\frac{t}{u}\Big)\cdot\frac{1}{u}\cdot 1 = \frac{1}{u}\cos\frac{t}{u}\,.$$
La derivada parcial de g con respecto a u es
$$g_u = \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\Big(\operatorname{sen}\frac{t}{u}\Big) = \Big(\cos\frac{t}{u}\Big)\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{t}{u}\Big) = \Big(\cos\frac{t}{u}\Big)\cdot t\cdot\frac{\partial}{\partial u}u^{-1} = \Big(\cos\frac{t}{u}\Big)\cdot t\cdot(-u^{-2}) = -\frac{t}{u^2}\cos\frac{t}{u}\,.$$
La diferencial exacta o total de g es
$$dg = g_t\,dt + g_u\,du = \frac{1}{u}\cos\frac{t}{u}\,dt - \frac{t}{u^2}\cos\frac{t}{u}\,du = \frac{1}{u^2}\Big(\cos\frac{t}{u}\Big)(u\,dt - t\,du)\,.$$

□

Ejemplo 2.10.9 *Obtener la diferencial exacta de la función* $z = e^x\cos y + e^y\tan x$.

▼ La derivada parcial de z con respecto a x es
$$\begin{aligned} z_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y + e^y\tan x) = \cos y\cdot\frac{\partial}{\partial x}e^x + e^y\cdot\frac{\partial}{\partial x}\tan x = (\cos y)e^x + e^y\sec^2 x = \\ &= e^x\cos y + e^y\sec^2 x\,. \end{aligned}$$
La derivada parcial de z con respecto a y es
$$\begin{aligned} z_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^x\cos y + e^y\tan x) = e^x\frac{\partial}{\partial y}\cos y + (\tan x)\frac{\partial}{\partial y}e^y = \\ &= e^x(-\operatorname{sen} y) + (\tan x)e^y = -e^x\operatorname{sen} y + e^y\tan x\,. \end{aligned}$$

La diferencial exacta o total de z es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = (e^x \cos y + e^y \sec^2 x)\,dx + (-e^x \operatorname{sen} y + e^y \tan x)\,dy\,.$$

□

Ejercicios 2.10.3 *Diferencial total.* *Soluciones en la página 17*
Obtener la diferencial exacta o total de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = y \operatorname{sen} x - x \cos y$.
2. $g(x,y) = xy\tan(xy)$.
3. $z = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$.
4. $y = u^3 - 2u^2w + 3uw^2 - 4w^2$.
5. $\phi(x,u) = \sqrt{u^2 - x^2}$.

2.10.4 Derivación implícita

Con frecuencia consideramos que una función de dos variables $z = F(x,y)$ puede utilizarse, cuando se considera una curva de nivel $F(x,y) = C$, para definir implícitamente a una de las variables, por ejemplo y, en función de la otra x. Calcular la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ se lograba en el curso de Cálculo de una Variable mediante la derivación implícita. En esta sección veremos una forma alternativa.

Ejemplo 2.10.10 *Sea la función $F(x,y) = 2x^2y - xy^3$.*

▼ Podemos hacer los siguientes cálculos:

1. Notemos que

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - xy^3) = 2y(2x) - y^3(1) = 4xy - y^3$$

y que

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y - xy^3) = 2x^2(1) - x(3y^2) = 2x^2 - 3xy^2.$$

2. Si consideramos la ecuación $2x^2y - xy^3 = 7$ como un lugar geométrico en el plano donde cada punto del mismo define localmente una función $y = f(x)$, podemos entonces derivar implícitamente con respecto a x y despejar $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{d}{dx}(2x^2y - xy^3) = \frac{d}{dx}(7) \Rightarrow 2x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(2x^2) - x\frac{d}{dx}(y^3) - y^3\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(7) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2\frac{dy}{dx} + 4xy - 3xy^2\frac{dy}{dx} - y^3 = 0 \Rightarrow (2x^2 - 3xy^2)\frac{dy}{dx} = -4xy + y^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4xy + y^3}{2x^2 - 3xy^2} = -\frac{4xy - y^3}{2x^2 - 3xy^2}.$$

Por lo anterior, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}\,.$$

□

En general, podemos afirmar que:

- Si la ecuación $F(x,y) = C$ define a y implícitamente como una función de x, entonces:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, \text{ siempre que } F_y \neq 0.$$

Recordemos que esta ED proporciona la pendiente de la recta tangente, en (x_0, y_0), a la gráfica de una función definida implicitamente que pasa por el punto (x_0, y_0).

Ejemplo 2.10.11 *Encontrar una ecuación diferencial a la cual satisfacen las circunferencias $x^2 + y^2 = r^2$, es decir, de radio r con centro en el origen.*

▼ Ya que $x^2 + y^2 = r^2$, entonces $x^2 + y^2 - r^2 = 0$; en este caso $F(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$ (con r constante). De aquí que

$$F_x = 2x \quad \& \quad F_y = 2y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}y} = -\frac{x}{y}.$$

La ecuación diferencial solicitada es

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

□

Ejemplo 2.10.12 *Encontrar una ecuación diferencial que las parábolas con vértice en el origen, $y = cx^2$, satisfagan.*

▼ Ya que $y = cx^2$, entonces $\dfrac{y}{x^2} = c$; en este caso $F(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$.

$$F_x = y\left(-\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}}}\right) = -\frac{2y}{x^3} \quad \& \quad F_y = \frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-\dfrac{2y}{x^{\cancel{3}}}}{\dfrac{1}{\cancel{x^2}}} = \frac{2y}{x}.$$

La ecuación diferencial solicitada es

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

□

Ejercicios 2.10.4 *Derivacion implícita.* *Soluciones en la página 17*

Obtener $\dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{x}{y} - xy^2 + 3 = 0.$
2. $5x^2y + \ln x = 0.$
3. $3x - y + Ce^{-x} = 0.$
4. $x \ln y = xy^2 + e^{2y}.$
5. $\operatorname{sen} x - 3y + 2xy = 0.$

2.10.5 Derivadas parciales de orden superior

Al calcular las derivadas parciales de una función $z = f(x,y)$, se obtienen nuevas funciones que, en general, también dependen de x & y. Esto es $f_x = g(x,y)$ & $f_y = h(x,y)$.
A estas nuevas funciones se les denomina primeras derivadas parciales de la función $z = f(x,y)$.
Al derivar parcialmente estas nuevas funciones, se obtienen las segundas derivadas parciales de la función $z = f(x,y)$, las cuales son las siguientes:

1. Derivando con respecto a x la función $g(x, y) = f_x$:

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_x = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

que es la segunda derivada parcial de f, con respecto a x dos veces.

2. Derivando con respecto a y la función $g(x, y) = f_x$:

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_x = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

que es la segunda derivada parcial de f, primero con respecto a x, luego con respecto a y.

3. Derivando con respecto a x la función $h(x, y) = f_y$:

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

que es la segunda derivada parcial de f, primero con respecto a y; luego con respecto a x.

4. Derivando con respecto a y la función $h(x, y) = f_y$:

$$\frac{\partial}{\partial y} h(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_y = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

que es la segunda derivada parcial de f, con respecto a y dos veces.

- A las parciales f_{xy} & f_{yx} se les conoce como segundas derivadas parciales mixtas.

Ejemplo 2.10.13 *Calcular las segundas derivadas parciales de la función* $f(x, y) = 3x^4 - 5x^2y^2 + 6y^4$.

▼

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(3x^4 - 5x^2y^2 + 6y^4) = 3(4x^3) - 5y^2(2x) + 0 = 12x^3 - 10xy^2.$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(3x^4 - 5x^2y^2 + 6y^4) = 0 - 5x^2(2y) + 6(4y^3) = -10x^2y + 24y^3.$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial}{\partial x}(12x^3 - 10xy^2) = 12(3x^2) - 10y^2(1) = 36x^2 - 10y^2.$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial}{\partial y}(12x^3 - 10xy^2) = 0 - 10x(2y) = -20xy.$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial}{\partial x}(-10x^2y + 24y^3) = -10y(2x) + 0 = -20xy.$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} f_y = \frac{\partial}{\partial y}(-10x^2y + 24y^3) = -10x^2(1) + 24(3y^2) = -10x^2 + 72y^2.$$

Observe que $f_{xy} = -20xy = f_{yx}$. Las segundas derivadas parciales mixtas son iguales.

□

Ejemplo 2.10.14 *Calcular las segundas derivadas parciales de la función $z = e^{xy}$.*

▼

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} = e^{xy} \frac{\partial}{\partial x}(xy) = e^{xy} y \cdot 1 = ye^{xy}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} = e^{xy} \frac{\partial}{\partial y}(xy) = e^{xy} x \cdot 1 = xe^{xy}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy}) = y\frac{\partial}{\partial x}e^{xy} = y(e^{xy}y) = y^2 e^{xy}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) = y\frac{\partial}{\partial y}e^{xy} + e^{xy}\frac{\partial}{\partial y}y = y(e^{xy}x) + e^{xy}\cdot 1 = xye^{xy} + e^{xy} = e^{xy}(xy+1).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = x\frac{\partial}{\partial x}e^{xy} + e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}x = x(e^{xy}y) + e^{xy}\cdot 1 = xye^{xy} + e^{xy} = e^{xy}(xy+1).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy}) = x(e^{xy}x) = x^2 e^{xy}.$$

Observamos que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{xy}(xy+1) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Las segundas derivadas parciales mixtas son iguales.

□

- Bajo condiciones de continuidad, las segundas derivadas parciales mixtas son iguales. Esto es, si las funciones f, f_x, f_y,f_{xy} & f_{yx} son continuas en cierta región, entonces $f_{xy} = f_{yx}$.

Ejercicios 2.10.5 *Derivadas parciales de orden superior.* *Soluciones en la página 17*
Calcular las segundas derivadas parciales y verificar la igualdad de las parciales mixtas para las funciones siguientes:

1. $f(x, y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$.
2. $g(x, y) = e^x \cos(y) + e^y \operatorname{sen}(x)$.
3. $h(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$.
4. $z(x, y) = (2x - 3y)^5$.
5. $w(u, y) = \cos(3u + 2y)$.

2.10.6 Integración parcial

1. Recordemos que, para la integral indefinida de funciones de una variable, si $\dfrac{d}{dt}f(t) = g(t)$ y si C es cualquier constante, entonces:

$$\frac{d}{dt}[f(t) + C] = g(t) \quad \text{así que} \quad \int g(t)\,dt = f(t) + C\,.$$

Donde C es la constante de integración.

Ahora bien, con funciones de dos variables x & y, tenemos lo siguiente:

2. Si $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x, y) = g(x, y)$ & $h(y)$ es una función que depende solamente de y, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y) + h(y)] = \frac{\partial}{\partial x}f(x, y) + \frac{\partial}{\partial x}h(y) = g(x, y) + 0 = g(x, y)\,.$$

Por lo que, integrando parcialmente con respecto a x:

$$\int^x g(x,y)\,dx = f(x,y) + h(y)\,,$$

donde $h(y)$ desempeña el papel de constante de integración.

3. De manera análoga, si $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \phi(x,y)$ & $\eta(x)$ es cualquier función que depende solamente de x, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x,y) + \eta(x)] = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}\eta(x) = \phi(x,y) + 0 = \phi(x,y)\,.$$

Por lo que, integrando parcialmente con respecto a y:

$$\int^y \phi(x,y)\,dy = f(x,y) + \eta(x)\,,$$

donde $\eta(x)$ es ahora la constante de integración.

Observación. Cuando se integra parcialmente con respecto a una de las variables, la otra variable se considera constante y participa en la constante de integración.

Ejemplo 2.10.15 *Calcular*

$$\int^x f(x,y)\,dx \;\&\; \int^y f(x,y)\,dy, \text{ para } f(x,y) = 5x^4 - 6x^3y^2 + 8y^3 - 2\,.$$

▼ Primero:

$$\begin{aligned}\int^x f(x,y)\,dx &= \int^x (5x^4 - 6x^3y^2 + 8y^3 - 2)\,dx = \\ &= 5\int x^4\,dx - 6y^2\int x^3\,dx + 8y^3\int dx - 2\int dx = \\ &= \cancel{5}\left(\frac{x^5}{\cancel{5}}\right) - 6y^2\left(\frac{x^4}{4}\right) + 8y^3x - 2x + h(y) = \\ &= x^5 - \frac{3}{2}x^4y^2 + 8xy^3 - 2x + h(y)\,.\end{aligned}$$

Donde $h(y)$ es cualquier función que depende sólo de y.
Segundo:

$$\begin{aligned}\int^y f(x,y)\,dy &= \int^y (5x^4 - 6x^3y^2 + 8y^3 - 2)\,dy = \\ &= 5x^4\int dy - 6x^3\int y^2\,dy + 8\int y^3\,dy - 2\int dy = \\ &= 5x^4y - 6x^3\left(\frac{y^3}{3}\right) + 8\left(\frac{y^4}{4}\right) - 2y + h(x) = \\ &= 5x^4y - 2x^3y^3 + 2y^4 - 2y + h(x)\,.\end{aligned}$$

Donde $h(x)$ es cualquier función que depende sólo de x. □

Ejemplo 2.10.16 *Calcular*

$$\int^x g(x,y)\,dx \;\&\; \int^y g(x,y)\,dy, \text{ para } g(x,y) = \sqrt{2x - 3y}\,.$$

▼ Primero:

$$\int^x g(x,y)\,dx = \int^x \sqrt{2x-3y}\,dx = \frac{1}{2}\int^x (2x-3y)^{\frac{1}{2}}\;2dx\,.$$

Si $u = 2x - 3y$, con y constante $\Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2 \;\Rightarrow\; du = 2\,dx$. Entonces:

$$\int^x g(x,y)\,dx = \frac{1}{2}\int^x (2x-3y)^{\frac{1}{2}}\,2dx = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + h(y) =$$
$$= \frac{1}{\cancel{2}}(2x-3y)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{3}\right) + h(y) = \frac{1}{3}(2x-3y)^{\frac{3}{2}} + h(y)\,.$$

Donde $h(y)$ es cualquier función que depende sólo de y.
Segundo:

$$\int^y g(x,y)\,dy = \int^y \sqrt{2x-3y}\,dy = \frac{1}{-3}\int^y (2x-3y)^{\frac{1}{2}}\,(-3)dy.$$

Si $u = 2x - 3y$, con x constante $\Rightarrow \dfrac{du}{dy} = -3 \;\Rightarrow\; du = -3\,dy$. Entonces:

$$-\frac{1}{3}\int^y (2x-3y)^{\frac{1}{2}}\,(-3)dy = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + h(x) =$$
$$= -\frac{1}{3}(2x-3y)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right) + h(x) = -\frac{2}{9}(2x-3y)^{\frac{3}{2}} + h(x)\,.$$

Donde $h(x)$ es cualquier función que depende sólo de x.

□

Ejemplo 2.10.17 *Calcular*

$$\int^x \phi(x,y)\,dx \;\&\; \int^y \phi(x,y)\,dy,\ \textit{para}\ \phi(x,y) = \cos xy\,.$$

▼ Primero:

$$\int^x \phi(x,y)\,dx = \int^x \cos xy\,dx = \int^x \frac{1}{y}(\cos xy)y\,dx\,.$$

Advierta que $u = xy$, con y constante $\Rightarrow \dfrac{du}{dx} = y \;\Rightarrow\; du = y\,dx$. Entonces:

$$\int^x \phi(x,y)\,dx = \frac{1}{y}\int^x (\cos xy)y\,dx = \frac{1}{y}\,\mathrm{sen}\,xy + h(y)\,.$$

Donde $h(y)$ es cualquier función que depende sólo de y.
Segundo:

$$\int^y \phi(x,y)\,dy = \int^y \cos xy\,dy = \int^y \frac{1}{x}(\cos xy)x\,dy\,.$$

Observe que $u = xy$, con x constante $\Rightarrow \dfrac{du}{dy} = x \;\Rightarrow\; du = x\,dy$. Entonces:

$$\int^y \phi(x,y)\,dx = \frac{1}{x}\int^y (\cos xy)x\,dy = \frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\,xy + h(x)\,.$$

Donde $h(x)$ es cualquier función que depende sólo de x.

□

Ejemplo 2.10.18 *Calcular*

$$\int^x f(x,y)\,dx \;\&\; \int^y f(x,y)\,dy, \text{ para } f(x,y) = xye^{xy}\,.$$

▼ Primero:

$$\begin{aligned}\int^x f(x,y)\,dx &= \int^x xye^{xy}\,dx = \int^x xe^{xy}y\,dx = \\ &= uv - \int v\,du = xe^{xy} - \int^x e^{xy}\,dx = \\ &= xe^{xy} - \frac{1}{y}\int^x e^{xy}y\,dx = \\ &= xe^{xy} - \frac{1}{y}e^{xy} + h(y) = \\ &= \left(x - \frac{1}{y}\right)e^{xy} + h(y)\,.\end{aligned}$$

Usamos la técnica de integración por partes, con y constante:

$$\begin{aligned} u &= x &\Rightarrow\quad du &= dx; \\ dv &= e^{xy}y\,dx &\Rightarrow\quad v &= e^{xy}. \end{aligned}$$

Segundo:

$$\begin{aligned}\int^y f(x,y)\,dy &= \int^y xye^{xy}\,dy = \int^y ye^{xy}x\,dy = \\ &= uv - \int v\,du = ye^{xy} - \int^y e^{xy}\,dy = \\ &= ye^{xy} - \frac{1}{x}\int^y e^{xy}x\,dy = \\ &= ye^{xy} - \frac{1}{x}e^{xy} + h(x) = \\ &= \left(y - \frac{1}{x}\right)e^{xy} + h(x)\,.\end{aligned}$$

Usamos la técnica de integración por partes, con x constante:

$$\begin{aligned} u &= y &\Rightarrow\quad du &= dy; \\ dv &= e^{xy}x\,dy &\Rightarrow\quad v &= e^{xy}. \end{aligned}$$

□

Ejercicios 2.10.6 *Integración parcial.* *Soluciones en la página 17*
Evaluar en cada ejercicio las integrales de la funciones presentadas

1. $\int^x f(x,y)\,dx \;\&\; \int^y f(x,y)\,dy$, para $f(x,y) = 5x^4 - 6x^2y^2 + 4y^3 - 1\,.$
2. $\int^x g(x,y)\,dx \;\&\; \int^y g(x,y)\,dy$, para $g(x,y) = \sqrt[3]{4x - 5y}\,.$
3. $\int^x \phi(x,y)\,dx \;\&\; \int^y \phi(x,y)\,dy$, para $\phi(x,y) = xy(x^2 + y^2)^9\,.$
4. $\int^x f(x,y)\,dx \;\&\; \int^y f(x,y)\,dy$, para $f(x,y) = xy\cos xy\,.$
5. $\int^x g(x,y)\,dx \;\&\; \int^y g(x,y)\,dy$, para $g(x,y) = 2xye^{(x^2-y^2)}\,.$

Ejercicios 2.10.1 *Definiciones básicas.* *Página 4*

1. a. 17;
   b. -4;
   c. $2a^3$;
   d. $2t^3x^3$;
   e. $\dfrac{1}{4}$;
   f. 1;
   g. $\dfrac{x^3+2xy^2-y^3}{x^3}$;
   h. $x^3+2xy^2-y^3$;
   i. $\dfrac{x^3+2xy^2-y^3}{y^3}$;
   j. $x^3+2xy^2-y^3$.
2. a. $\dfrac{1}{3}$;
   b. $\dfrac{1}{2}$;
   c. $\begin{cases} 1+\sqrt{2}, & \text{si } tx>0; \\ 1-\sqrt{2}, & \text{si } tx<0. \end{cases}$
   d. $a+\sqrt{1+a^2}$;
   e. $\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, para $x>0$.
3. a. 1;
   b. $\dfrac{1+e}{e}$;
   c. 1;
   d. $e^{-\frac{y}{x}}+\dfrac{x}{y}$;
   e. $e^{-\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$.
4. a. 0;
   b. 0;
   c. $\dfrac{u}{t}\ln\left(\dfrac{u}{t}\right)$;
   d. $\dfrac{u}{t}\ln\left(\dfrac{u}{t}\right)$;
   e. $\dfrac{u}{t}\ln\left(\dfrac{u}{t}\right)$.
5. a. $-\dfrac{5}{2}$;
   b. -1;
   c. $\dfrac{x^2+y^2}{xy-x^2}$;
   d. $\dfrac{1+a^2}{a-1}$;
   e. $\dfrac{a^2+1}{a-a^2}$;
   f. $\dfrac{x^2+y^2}{xy-y^2}$;
   g. $\dfrac{x^2+y^2}{xy-x^2}$;
   h. $\dfrac{x^2+y^2}{xy-x^2}$.

Ejercicios 2.10.2 *Derivadas parciales.* *Página 7*

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=12x^3-8xy^2$;

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-8x^2y-20y^3$.
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^x\operatorname{sen} y+e^y\operatorname{sen} x$;

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^x\cos y-e^y\cos x$.
3. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3x^2y^2+3x^2y^3}{(x^3+y^2)^2}$;

   $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{3x^3y^2+2x^3y+y^4}{(x^3+y^2)^2}$.
4. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=2tu^3e^{t^2u^3}(t^2u^3+1)$;

   $\dfrac{\partial w}{\partial u}=3t^2u^2e^{t^2u^3}(t^2u^3+1)$.
5. $\dfrac{\partial h}{\partial x}=2x^2\sec^2(x^2+y^2)+\tan(x^2+y^2)-2xy\tan(x^2+y^2)\sec(x^2+y^2)$;

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2xy\sec^2(x^2+y^2) - 2y^2\sec(x^2+y^2)\tan(x^2+y^2) - \sec(x^2+y^2).$$

Ejercicios 2.10.3 *Diferencial total.* *Página 9*

1. $df = (y\cos x - \cos y)\,dx + (\operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} y)\,dy$.
2. $[xy^2\sec^2(xy) + y\tan(xy)]\,dx + [x^2y\sec^2(xy) + x\tan(xy)]\,dy$.
3. $dz = \dfrac{y}{x^2}\left[\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) - 1\right]\,dx + \dfrac{1}{x}\left[1 + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]\,dy$.
4. $dy = (3u^2 - 4uw + 3w^2)\,du + (6uw - 2u^2 - 8w)\,dw$.
5. $d\phi = -\dfrac{x}{\sqrt{u^2-x^2}}\,dx + \dfrac{u}{\sqrt{u^2-x^2}}\,du$.

Ejercicios 2.10.4 *Derivación implícita.* *Página 10*

1. $y' = \dfrac{y - y^4}{x + 2xy^3}$.
2. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{10yx^2 + 1}{5x^3}$.
3. $y' = -y + 3x + 3$.
4. $y' = \dfrac{y\ln y - y^3}{2xy^2 + 2ye^{2y} - x}$.
5. $y' = \dfrac{\cos x + 2y}{3 - 2x}$.

Ejercicios 2.10.5 *Derivadas parciales de orden superior.* *Página 12*

1. a. $f_x = 4x^3 - 4xy^2$;
   b. $f_y = -4x^2y + 4y^3$;
   c. $f_{xx} = 12x^2 - 4y^2$;
   d. $f_{yy} = -4x^2 + 12y^2$;
   e. $f_{xy} = -8xy$;
   f. $f_{yx} = -8xy$.
2. a. $g_x = e^x\cos y + e^y\cos x$;
   b. $g_y = -e^x\operatorname{sen} y + e^y\operatorname{sen} x$;
   c. $g_{xx} = e^x\cos y - e^y\operatorname{sen} x$;
   d. $g_{yy} = -e^x\cos y + e^y\operatorname{sen} x$;
   e. $g_{xy} = -e^x\operatorname{sen} y + e^y\cos x$;
   f. $g_{yx} = -e^x\operatorname{sen} y + e^y\cos x$.
3. a. $h_x = y\cos(xy)$;
   b. $h_y = x\cos(xy)$;
   c. $h_{xx} = -y^2\operatorname{sen}(xy)$;
   d. $h_{yy} = -x^2\operatorname{sen}(xy)$;
   e. $h_{xy} = -xy\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$;
   f. $h_{yx} = -xy\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$.
4. a. $z_x = 10(2x-3y)^4$;
   b. $z_y = -15(2x-3y)^4$;
   c. $z_{xx} = 80(2x-3y)^3$;
   d. $z_{yy} = 180(2x-3y)^3$;
   e. $z_{xy} = -120(2x-3y)^3$;
   f. $z_{yx} = -120(2x-3y)^3$.
5. a. $w_u = -3\operatorname{sen}(3u+2y)$;
   b. $w_y = -2\operatorname{sen}(3u+2y)$;
   c. $w_{uu} = -9\cos(3u+2y)$;
   d. $w_{yy} = -4\cos(3u+2y)$;
   e. $w_{uy} = -6\cos(3u+2y)$;
   f. $w_{yu} = -6\cos(3u+2y)$.

Ejercicios 2.10.6 *Integración parcial.* *Página 15*

1. a. $\displaystyle\int^x f(x,y)\,dx = x^5 - 2x^3y^2 + 4xy^3 - x + h(y)$;
   b. $\displaystyle\int^y f(x,y)\,dx = 5x^4y - 2x^2y^3 + y^4 - y + h(x)$.
2. a. $\displaystyle\int^x f(x,y)\,dx = \frac{3}{16}(4x-5y)^{\frac{4}{3}} + h(y)$;
   b. $\displaystyle\int^y f(x,y)\,dx = -\frac{3}{20}(4x-5y)^{\frac{4}{3}} + h(x)$.

3. a. $\int^x f(x,y)\,dx = \dfrac{y}{20}(x^2+y^2)^{10} + h(y)$;

   b. $\int^y f(x,y)\,dx = \dfrac{x}{20}(x^2+y^2)^{10} + h(x)$.

4. a. $\int^x f(x,y)\,dx = x\,\mathrm{sen}(xy) + \dfrac{1}{y}\cos(xy) + h(y)$;

   b. $\int^y f(x,y)\,dx = y\,\mathrm{sen}(xy) + \dfrac{1}{x}\cos(xy) + h(x)$.

5. a. $\int^x f(x,y)\,dx = ye^{(x^2-y^2)} + h(y)$;

   b. $\int^y f(x,y)\,dx = -xe^{x^2-y^2} + h(x)$.