CAPÍTULO

1

Conceptos básicos

1.4.2 Curva solución de un PVI

Como comentamos al hablar sobre las soluciones generales y particulares de una ED, ocurre que las soluciones generales contienen una o más constantes arbitrarias. Para encontrar valores determinados de esas constantes se requiere de una o más condiciones iniciales. Recordemos que llamamos problema de valor inicial (PVI) al formado por una ED y una condición inicial, por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ con la condición } y(x_0) = y_0.$$

Discutiremos algunos aspectos relacionados con la existencia de soluciones de los PVI en la siguiente sección. De hecho, todas las ED y PVI que se presentan en este libro tienen solución, a menos que se indique expresamente lo contrario. Puede apreciarse algo con respecto a las soluciones de ED y PVI si consideramos las ED de primer orden más simples que puede haber, aquellas en las que f depende sólo de la variable x:

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \text{ con la condición } y(x_0) = y_0.$$

La solución de la ED es

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)\, dx.$$

Es claro que la integral indefinida que está indicada debe contener una constante C aditiva arbitraria y, si la condición $y(x_0) = y_0$ puede cumplirse para una elección adecuada de C, ella nos dará la solución al PVI.

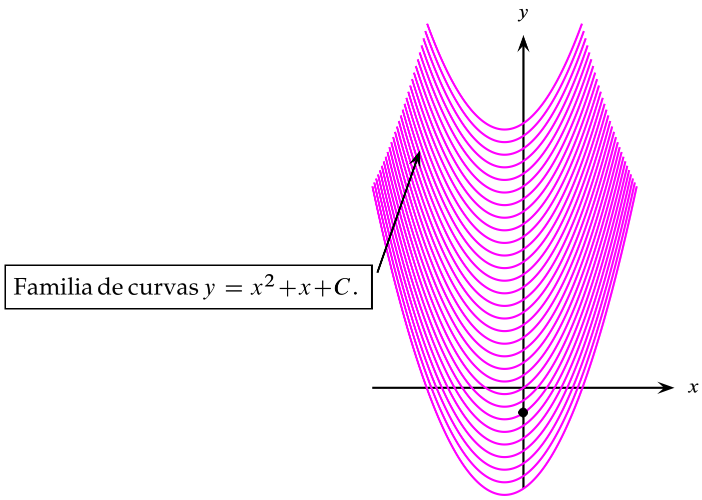
Ejemplo 1.4.1 *Encontrar la solución del PVI:* $y' = 2x + 1$; *con la condición* $y(0) = -1$.

▼ Esta ecuación diferencial se puede resolver por integración:

$$y' = 2x + 1 \Rightarrow y = \int (2x + 1)\, dx \Rightarrow y = x^2 + x + C .$$

1. canek.azc.uam.mx: 21/ 9/ 2010

Sin la condición inicial, la solución general de la ecuación diferencial es la familia de parábolas que se obtienen al trasladar hacia arriba y hacia abajo a la parábola $y = x^2 + x$:

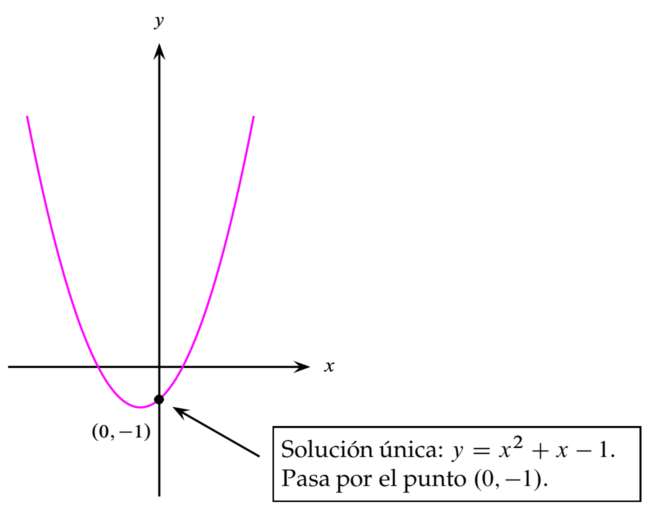


Tomando en cuenta la condición inicial, la única solución que cumple $y(0) = -1$ es aquella que pasa por el punto $(0, -1)$ del plano cartesiano. Para obtener esta solución sustituimos $x = 0$ & $y = -1$ en la familia de curvas $y = x^2 + x + C$ y obtenemos un valor de C:

$$y = x^2 + x + C \;\Rightarrow\; -1 = 0^2 + 0 + C \;\Rightarrow\; C = -1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = x^2 + x - 1 \text{ es la única curva que pasa por el punto } (0, -1) \;\Rightarrow$$

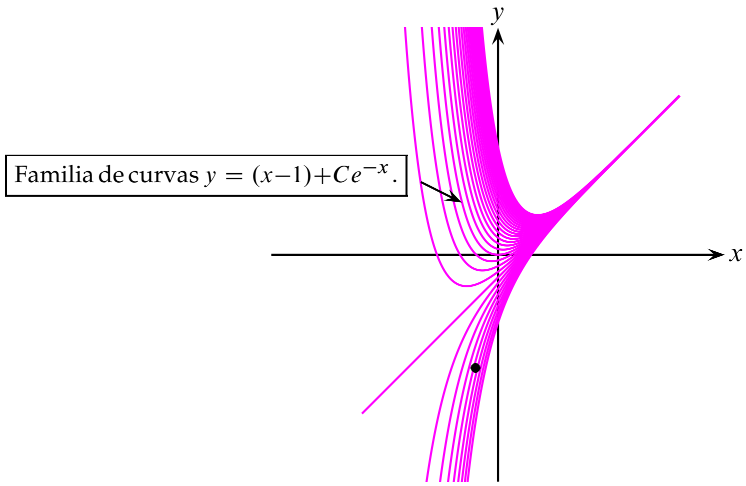
$$\Rightarrow\; y = x^2 + x - 1 \text{ es la única solución del problema: } y' = 2x + 1; \text{ sujeta a la condición } y(0) = -1.$$



□

Ejemplo 1.4.2 *Encontrar la solución del PVI* $y' = -y + x$ *con la condición* $y(-1) = -5$.

▼ Como se mencionó en el ejemplo **??**, hemos aceptado que la solución general de la ecuación diferencial $y' = -y + x$ es $y = (x - 1) + Ce^{-x}$.

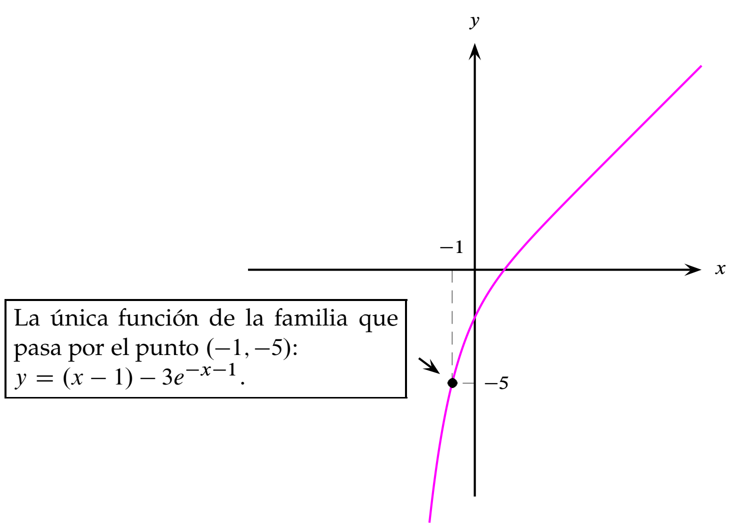


De todas estas curvas sólo existe una que pasa por el punto $(-1,-5)$: $x = -1$ & $y = -5$. Sustituyendo $x = -1$ & $y = -5$ en la ecuación de la familia para obtener el valor de C tenemos:

$$y = (x-1) + Ce^{-x} \Rightarrow -5 = (-1-1) + Ce^{1} \Rightarrow -5 = -2 + Ce^{1} \Rightarrow Ce^{1} = -3 \Rightarrow C = -3e^{-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ y = (x-1) - 3e^{-1}e^{-x}$ es la única curva que pasa por el punto $(-1,-5)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ y = (x-1) - 3e^{(-1-x)}$ es la única solución del problema $y' = -y + x$; $y(-1) = -5$.



□

Observaciones:

1. Si bien hemos escrito antes que la solución de $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ es $y = \int f(x)\,dx$, debe quedar entendido que la solución la podemos obtener de forma explícita en el supuesto caso de que se pueda realizar la integral. Algunas integrales, como $\int e^{x^2}\,dx$ o bien $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ no se pueden expresar en términos de funciones elementales, es decir, como sumas, productos, cocientes, potencias de las funciones: constantes, x, e^{x}, $\ln x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, etc. En casos como ésos tenemos que recurrir como último recurso a la evaluación de dichas integrales mediante métodos numéricos. El capítulo siete de este libro presenta algunos métodos utilizados para la solución de PVI.

2. La especificación de una condición inicial para una ED no puede ser completamente arbitraria. Por ejemplo, si a la ED $y' = \dfrac{1}{x}$ le añadimos la condición $y(0) = 5$, entonces como la solución general es $y = \ln x + C$, vemos que no se puede cumplir $y(0) = 5 = \ln 0 + C$, pues $\ln 0$ no está definido, como tampoco estaría definida la derivada $y'(0) = \dfrac{1}{0}$. Se deben cumplir ciertos requisitos, que describiremos en la siguiente sección, para que una condición inicial determine una solución particular de la ED.

De los ejemplos previos y lo discutido sobre soluciones generales de ED, podemos concluir que la solución general de una ED es una familia de curvas.

- En general, podemos definir una familia de curvas con un parámetro como el conjunto de soluciones de una ecuación de la forma

$$F(x, y, C) = 0,$$

donde x, y son coordenadas y C representa un parámetro, que es un valor numérico que se mantiene constante para cada curva.

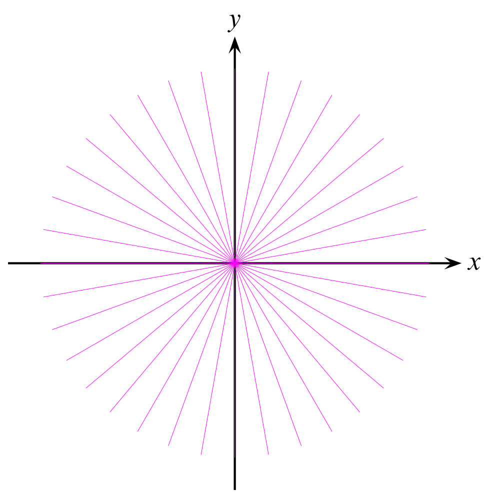
Ejemplo 1.4.3 *Presentamos varios ejemplos de familias de curvas.*

▼

1. La familia de todas las rectas que pasan por $(0, 0)$, excepto la vertical, se puede representar por la ecuación:

$$y = mx,$$

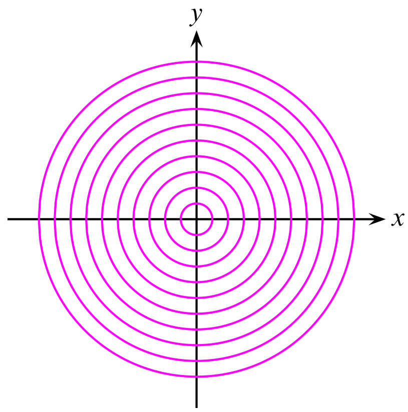
donde la pendiente m es un parámetro. La siguiente gráfica muestra las curvas de la familia para algunos valores de m:



2. La familia de todos los círculos con centro $(0, 0)$ se puede escribir como:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

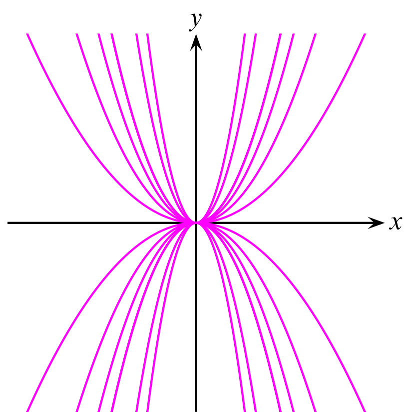
donde el valor de r^2 (el cuadrado del radio) se puede tomar como parámetro. La gráfica siguiente muestra algunas curvas de esta familia para diferentes valores de r:



3. La familia de todas las parábolas con vértice en $(0,0)$ y el eje y como eje de simetría se expresa como:

$$y = cx^2,$$

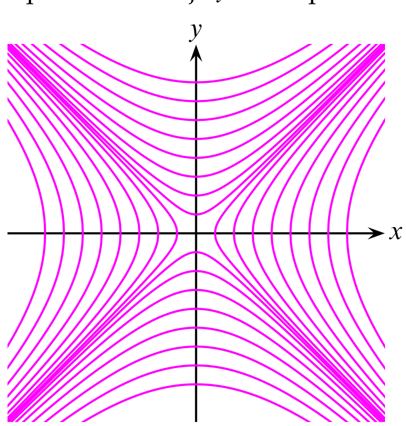
donde el parámetro c indica hacia dónde abren las parábolas (arriba o abajo).



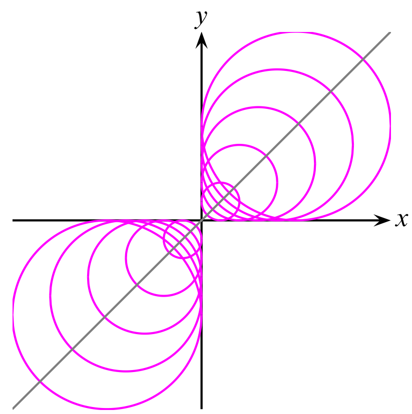
4. La familia de las curvas que representa la ecuación:

$$x^2 - y^2 = c,$$

donde c es el parámetro, con $c \in \mathbb{R}$, es la familia de hipérbolas cuyo centro es el origen y con asíntotas oblicuas las rectas $y = \pm x$, las cuales también forman parte de esa familia (para el valor $c = 0$). La gráfica siguiente muestra varias curvas de esta familia. Las rectas $y = \pm x$ (no dibujadas) son las asíntotas. Las hipérbolas cuyas ramas cruzan el eje x son las que corresponden a $c = 1, 2, 3, 4, \cdots$, mientras que las que tienen ramas que cortan al eje y corresponden a $c = -1, -2, -3, \cdots$.



5. La familia de todos los círculos en el plano que se encuentran en el primer y tercer cuadrante, tangentes a los ejes coordenados x, y.



Para cada círculo de la familia debe suceder que el centro se encuentre en un punto de la forma $C = (a, a)$ y toque a los ejes en $(a, 0)$ y $(0, a)$, por lo que su radio será $r = |\,a\,|$ y la ecuación será

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2,$$

con a como parámetro. Otra forma de escribir esta ecuación es desarrollando los binomios y cancelando el término a^2:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0.$$

□

En los ejemplos anteriores nos fue posible escribir una ecuación (algebraica) con sólo un parámetro y que representa a la totalidad de curvas de la familia. Una observación muy interesante es que también existe una ED que representa a las curvas de la familia, en el sentido de que las curvas solución de la ED son precisamente las curvas de la familia con la cual iniciamos. Para obtener esa ED lo que se hace es derivar (implícitamente por lo regular) la ecuación original de la familia y, usando ambas ecuaciones, eliminar el parámetro arbitrario. Ilustramos este procedimiento con las ecuaciones del ejemplo anterior.

Ejemplo 1.4.4 *Usar las familias del ejemplo anterior para obtener la ED asociada a cada familia.*

▼

1. Partiendo de la ecuación $y = mx$ obtenemos al derivar $\dfrac{dy}{dx} = m$, de donde, al sustituir esto último en la primera ecuación:

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)x \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Cualquier función de la forma $y = mx$ satisface a esta ED, como se puede apreciar de inmediato por sustitución:

$$y = mx \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = m \quad \& \quad y = mx \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = m, \text{ para } x \neq 0.$$

2. Al derivar implícitamente la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, obtenemos $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$, de donde

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Es claro que la familia de círculos definida por $x^2 + y^2 = r^2$ es solución de $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

3. Si derivamos la ecuación $y = cx^2$, obtenemos $\dfrac{dy}{dx} = 2cx$; de la ecuación original podemos despejar c para obtener $c = \dfrac{y}{x^2}$ (suponiendo $x \neq 0$) y al sustituir este valor de c en $\dfrac{dy}{dx}$ resulta:

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y}{x^2}\right)x = \frac{2y}{x}, \quad \text{suponiendo } x \neq 0.$$

Las funciones $y = cx^2$ son soluciones de la ED $y' = \dfrac{2y}{x}$, pues:

$$y = cx^2 \quad \& \quad y' = 2cx \Rightarrow y' = 2cx = 2\frac{y}{x^{\cancel{2}}}\cancel{x} = \frac{2y}{x}.$$

4. De manera análoga a los ejercicios anteriores, al derivar $x^2 - y^2 = c$, implícitamente obtenemos:

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{o sea,} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$

5. Al derivar implícitamente la ecuación de la familia obtenemos:

$$2x + 2yy' - 2a - 2ay' = 0 \Rightarrow (y-a)y' + (x-a) = 0 \Rightarrow y' = \frac{a-x}{y-a}.$$

La ED anterior aún contiene al parámetro a que falta eliminar. Para ello podemos ayudarnos de la ecuación original de la familia:

$$x^2 + y^2 - 2a(x+y) + a^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a(x+y) + (x+y)^2 = 2xy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [a + (x+y)]^2 = 2xy \Rightarrow a = -(x+y) \pm \sqrt{2xy}.$$

Por tanto, la ED de la familia es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x+y) \pm \sqrt{2xy} - x}{y + (x+y) \mp \sqrt{2xy}} = -\frac{2x + y \pm \sqrt{2xy}}{x + 2y \pm \sqrt{2xy}}.$$

□

Observaciones:

1. Podemos concluir que cualquier familia de curvas con un parámetro puede representarse por una ED, siguiendo el procedimiento descrito anteriormente: derivar implícitamente y eliminar el parámetro.
2. Si la familia de curvas depende de dos o más parámetros, es de esperarse que se tengan que calcular derivadas de orden superior para eliminar los parámetros. Obtendríamos así una ED de orden mayor que 1.

Ejemplo 1.4.5 *Encontrar una ED cuyas soluciones sean todas las curvas de la familia de dos parámetros A y B dada por*

$$y = A\cos x + B\operatorname{sen} x.$$

▼ Derivando:

$$y' = -A\operatorname{sen} x + B\cos x \quad \text{y} \quad y'' = -A\cos x - B\operatorname{sen} x,$$

de manera que la suma de y con y'' nos da

$$y'' + y = (-A\cos x - B\operatorname{sen} x) + (A\cos x + B\operatorname{sen} x) = 0,$$

o simplemente

$$y'' + y = 0.$$

□

Note que en los dos últimos ejemplos estamos partiendo de una familia de curvas o funciones dadas para obtener una ED de la cual todas ellas son soluciones. Esto equivale a comenzar con la respuesta de un problema para terminar con la pregunta del mismo, lo cual tiene un interés meramente teórico. Lo que nos ocupará en los capítulos siguientes es cómo hacer para encontrar las soluciones de una ED dada.

Ejercicios 1.5.2 *Curva solución de un PVI.* *Soluciones en la página 9*

1. Para las siguientes familias de curvas:

    a. La familia de todas las elipses con centro en $(0,0)$ tales que el semieje horizontal sea el doble del semieje vertical.
    b. La familia de todas las rectas no verticales que pasan por el punto $(1,2)$.
    c. La familia de todas las parábolas que abren hacia arriba y que son tangentes al eje x.
    d. La familia de todas las hipérbolas cuyas asíntotas son los ejes x, y.
    e. La familia de todos los círculos que pasan por los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$.

    Determinar: (i) La expresión algebraica que las describe. (ii) La ecuación diferencial de la cual son soluciones.

2. Dado el círculo $x^2 + y^2 = 1$, considere la familia de todas las rectas que son tangentes a dicho círculo. Determine la ecuación $F(x, y, C) = 0$ que satisfacen todas esas rectas.

Ejercicios 1.5.2 *Curva solución de un PVI.* *Página 8*

1. a. i. $\dfrac{x^2}{4b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,
      ii. $y'=-\dfrac{x}{4y}$;
   b. i. $y-2=m(x-1)$,
      ii. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-2}{x-1}$;
   c. i. $y=c(x-a)^2$,
      ii. $2y''\cdot y=xy'^2$;
   d. i. $x\cdot y=c$,
      ii. $y'=-\dfrac{y}{x}$;
   e. i. $x^2+y^2-2cy=1$,
      ii. $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2-1}$.
2. $y^2(1-x_0^2)=(1-x_0x)^2$.