CAPÍTULO

1

Conceptos básicos

1.6 Existencia y unicidad de soluciones *

Hasta el momento hemos hablado de las ED y sus soluciones sin preocuparnos sobre el problema de la existencia de dichas soluciones. Es de esperarse que las ED que consideraremos en la mayoría de los casos tengan solución, de otra forma el tiempo y esfuerzo que se inviertan en buscar una solución estarían irremediablemente perdidos. Por otra parte, el hecho de que para una ED en particular una persona no pueda encontrar su solución no significa que la ED no tenga solución. De aquí resulta muy deseable conocer algún criterio que nos permita decidir si una ED o bien un PVI tienen solución. En esta sección vamos a enunciar, sin demostración, un resultado de gran importancia, conocido como el teorema de Existencia y Unicidad de Picard-Lindelöf, que proporciona algunas condiciones que garantizan que un PVI tenga solución única. Antes de enunciar un resultado importante de esta sección, hagamos explícitas las siguientes afirmaciones que damos por sentadas:

1. Toda ED de primer orden se puede escribir en la forma normal:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

donde f es una función de dos variables (aunque bien puede darse el caso que dependa solamente de una de ellas), definida en todo el plano xy o bien en una parte del plano llamada el dominio de f.

2. Recordemos que al par formado por una ED y condiciones iniciales se le llama un problema de valor inicial o PVI. Es decir, un PVI de primer orden es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0. \tag{1.1}$$

Dicho lo anterior, si una función $y = \varphi(x)$ es solución del PVI (1.1), entonces por la segunda parte del teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\, dt = \varphi(t)\Big|_{x_0}^{x} = \varphi(x) - \varphi(x_0);$$

1. canek.azc.uam.mx: 21/ 9/ 2010

despejando $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\,dt.$$

Ahora bien, por ser $y = \varphi(x)$ una solución del PVI debe cumplir con $\varphi(x_0) = y_0$ y con $\varphi'(x) = \dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, de donde $\varphi'(t) = f(t, y) = f(t, \varphi(t))$. Resulta entonces que, si $y = \varphi(x)$ es una solución del PVI, entonces debe satisfacer a la siguiente ecuación integral:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt. \tag{1.2}$$

Con el argumento anterior hemos mostrado que, si $y = \varphi(x)$ es solución del PVI (1.1), entonces también es solución de (1.2). Recíprocamente, si $y = \varphi(x)$ satisface a la ecuación integral (1.2) y se cumplen algunas condiciones de continuidad sobre la función $f(x, y)$ del integrando (junto con su derivada parcial con respecto a su segunda variable), que hacen posible que la integral esté bien definida, entonces obtendríamos de (1.2) al derivar respecto a x, por la primera parte del teorema Fundamental del Cálculo:

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt\right] = \frac{d}{dx}\,[y_0] + \frac{d}{dx}\left[\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt\right] = f(x, \varphi(x)) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{y además} \quad \varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, \varphi(t))\,dt = y_0.$$

Aunque puede resultar difícil de creer, la ecuación integral (1.2) es en general más accesible para el análisis que el PVI (1.1) e incluso proporciona la base para un método general de solución, que consiste en obtener aproximaciones sucesivas $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots$ a la solución del PVI cada vez mejores, en el sentido de que se encuentran más cerca de la solución verdadera.

El esquema de aproximación es como sigue:

$\varphi_0(x)$ es cualquier aproximación a la solución; a falta de información se escoge comúnmente $\varphi_0(x) = y_0$, y a partir de ahí se definen:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))\,dt,\\
\varphi_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_1(t))\,dt,\\
&\vdots\\
\varphi_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))\,dt.
\end{aligned}$$

Cuando las condiciones que debe cumplir $f(x, y)$ se satisfacen, este esquema converge con bastante rapidez a la única solución del PVI.

Ejemplo 1.6.1 *Encuentre la solución al PVI:*

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad \textit{con la condición} \quad y(0) = 1.$$

▼ Definimos $\varphi_0(x) = y_0 = 1$; a partir de esta primera aproximación:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))\,dt = 1 + \int_0^x 1 \cdot dt = 1 + t\,\Big|_0^x = 1 + x;\\
\varphi_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_1(t))\,dt = 1 + \int_0^x (1+t)\,dt = 1 + \left(t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2};\\
\varphi_3(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_2(t))\,dt = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\cdot 3}\right)\Big|_0^x =\\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!};\\
&\ \vdots\\
\varphi_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))\,dt = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right) dt =\\
&= 1 + \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)\Big|_0^x = 1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right).
\end{aligned}$$

Se puede apreciar entonces que las funciones $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x) \cdots$ son las sumas parciales de la solución única del PVI, que está dada por la serie

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

como se puede verificar fácilmente.

□

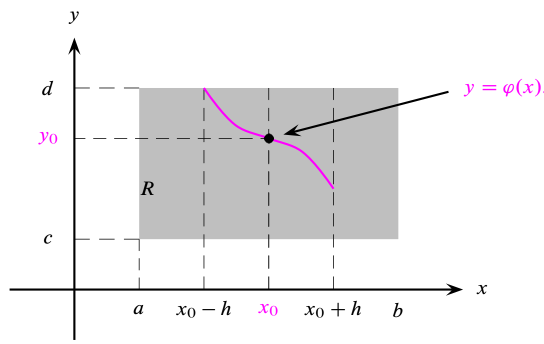
El ejemplo previo se pudo resolver fácilmente porque así fue escogido, de modo que el lector pudiera apreciar cómo funciona el método de aproximaciones sucesivas. Hay que aclarar que este método no se aplica en todos los PVI (solamente en aquellos que satisfacen a las condiciones para tener solución única), y aún en los casos en que se puede aplicar, la convergencia (a pesar de ser rápida) puede resultar difícil de apreciar, pues las integrales que dan las aproximaciones sucesivas se van tornando cada vez más complicadas. Afortunadamente, rara vez hay que emplear este método en la práctica; esta situación es similar al cálculo de integrales directamente a partir de la definición como límite de sumas de Riemann.

A continuación enunciamos el teorema de Existencia y Unicidad con una última aclaración: es costumbre en los textos de matemáticas que cualquier afirmación titulada teorema se suponga que es una proposición demostrable y que debe demostrarse en el texto. Nosotros, cuando anunciamos un resultado con el título teorema, significa que es algo importante para el desarrollo de los temas que siguen y muy posiblemente para todo el libro y para el material que se vea en otros cursos más avanzados. Sin embargo, esto no significa que proporcionaremos una demostración de ese resultado en este texto, pues dicha demostración puede encontrarse en alguna otra fuente.

Teorema 1.1 *de Existencia y Unicidad (Picard-Lindelöf)*
Dado un PVI

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \textit{con} \quad y(x_0) = y_0,$$

supongamos que hay un rectángulo $R = \{\,(x, y)\,|\, a < x < b,\ c < y < d\,\}$ *que contiene al punto* (x_0, y_0) *en su interior y dentro del cual* $f(x, y)$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *son continuas. Entonces el PVI tiene una única solución* $y = \varphi(x)$ *definida en algún intervalo* $x_0 - h < x < x_0 + h$*, para algún* $h > 0$.



Observe que el contenido de este teorema es dar condiciones suficientes para que el PVI tenga solución única. El rectángulo R del que habla podría ser grande (incluso ocupar todo el plano) o bien pequeño, pero la curva $y = \varphi(x)$ cuya existencia y unicidad garantiza el teorema está confinada al mismo rectángulo, hasta el intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$ debe quedar contenido en el intervalo $a < x < b$. El teorema no dice tampoco qué tan pequeño será el número h, sólo afirma que es positivo. En el mejor de los casos (como en el último ejemplo anterior al teorema) h puede ser $+\infty$ y la solución está definida para todo x; en el peor de los casos h puede ser un número positivo pequeño.

Ejemplo 1.6.2 *¿Tiene solución el PVI* $y' = x^2 y - y^5$, *con* $y(2) = -3$?

▼ Tenemos que $f(x, y) = x^2 y - y^5$ & $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 5y^4$ son las dos funciones continuas para todo valor de x & y. En consecuencia, el teorema de Existencia y Unicidad garantiza que hay una solución única.

□

Ejemplo 1.6.3 *¿Tiene solución el PVI* $y' = \ln(xy)$, *con* $y(0) = 2$?

▼ En el presente caso $f(x, y) = \ln(xy)$ & $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y}$ son las dos funciones definidas y continuas en $R = \{\, (x, y) \mid x > 0, y > 0 \,\}$. Dado que el punto $(0, 2)$ no se encuentra en el interior de R, el teorema de Existencia y Unicidad no garantiza que haya solución única. Si se tuviera una condición inicial $y(x_0) = y_0$ con $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ de modo que el punto (x_0, y_0) esté dentro de R, entonces sí podríamos asegurar la existencia de una solución única.

□

Ejemplo 1.6.4 *¿Tiene solución el PVI* $y' = 6xy^{\frac{2}{3}}$, *con la condición* $y(0) = 0$?

▼ Tenemos ahora que la función $f(x, y) = 6xy^{\frac{2}{3}}$ está definida y es continua para todos los valores x, y, mientras que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6x \cdot \dfrac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} = 4xy^{-\frac{1}{3}}$ está definida y es continua para todas las x, y excepto $y = 0$. La condición inicial dada está contenida en la recta $y = 0$, donde $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no está definida, así que el teorema no garantiza que haya solución única. Sin embargo en este ejemplo, a diferencia del anterior, sí hay solución aunque ésta no es única.

1. Para empezar, tenemos la solución trivial $y = \varphi_0(x) = 0$ para toda x, que satisface desde luego el PVI, pues

$$\varphi_0(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = 0 = 6x[\varphi(x)]^{\frac{2}{3}} = 6 \cdot 0.$$

2. Otra solución es la función $y = \varphi_1(x) = x^6$, pues evidentemente:

$$\varphi_1(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = 6x^5 = 6 \cdot x \cdot x^4 = 6x[\varphi_1(x)]^{\frac{2}{3}}.$$

3. También se pueden hacer combinaciones de las soluciones anteriores, como:

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0; \\ x^6, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \text{ o también } \varphi_4(x) = \begin{cases} x^6, & \text{si } x < 0; \\ 0, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

   Tener tan gran variedad de soluciones podría ser tan malo como no tener solución alguna, pues en los problemas de interés lo que se busca es una sola respuesta bien definida.

Podría probarse que el hecho de que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es discontinua en el punto (x_0, y_0) de la condición inicial es lo que provoca tantas soluciones en vez de una sola. Sin embargo, investigar esta clase de temas, aun cuando puede ser de gran interés, queda fuera de los objetivos de un curso introductorio de ED y de este libro.

□