ECUACIONES DIFERENCIALES
REDUCCIÓN DE ORDEN E100

Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la edo dada y escribir su solución general.

(1)
$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0; \qquad y_1(x) = x$$

(2)
$$x^2y'' + 3xy' + y = 0; \qquad y_1(x) = x^{-1}$$

(3)
$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0; \qquad y_1(x) = e^{-2x}$$

(4)
$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0; \qquad y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x$$

(5)
$$ay'' + by' + cy = 0; \qquad y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \text{ con } a,\ b,\ c \text{ constantes y } b^2 - 4ac = 0$$

canek.uam.mx: 21/ 4/ 2003.

Respuestas

Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la edo dada y escribir su solución general.

(1)
$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0; \qquad y_1(x) = x$$

Sea $y_2(x) = u(x)y_1(x)$
Si
$$y_2 = ux \Rightarrow y_2' = u'x + u \Rightarrow y_2'' = u'' = u''x + 2u'$$
Sustituyendo en

$$x^2y_2'' + 2xy_2' - 2y_2 = 0$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} x^2(u''x + 2u') + 2x(u'x + u) - 2(ux) &= 0 \\ x^3u'' + 2x^2u' + 2x^2u' + 2xu - 2ux &= 0 \\ x^3u'' + 4x^2u' &= 0 \end{aligned}$$

Dividiendo por x^3

(A)
$$u'' + \frac{4}{x}u' = 0$$

Si

$$u' = w = u'' = \frac{dw}{dx}$$

Sustituyendo en (A) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} + \frac{4}{x}w = 0 \Rightarrow \\ \frac{dw}{dx} &= -\frac{4}{x}w \Rightarrow \\ \frac{dw}{w} &= -4\frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \int \frac{dw}{w} &= -4\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln w = -4\ln x + c_1 \Rightarrow \\ \ln w &= \ln x^{-4} + \ln c_2 = \ln(c_2x^{-4}) \Rightarrow \\ w &= c_2x^{-4} \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} w = u' = \frac{du}{dx} &\Rightarrow \\ \frac{du}{dx} = c_2 x^{-4} &\Rightarrow \\ u = c_2 \int x^{-4}\, dx = c_2 \frac{x^{-3}}{-3} + c_3 &\Rightarrow \\ u = \frac{c_2}{-3} x^{-3} + c_3 \Rightarrow u = c_4 x^{-3} + c_3 & \end{aligned}$$

Ya que basta con tener una $u(x)$, entonces se puede tomar a $c_4 = 1$ y a $c_3 = 0$.
Así pues, $u = x^{-3}$
Pero $y_2(x) = ux$, entonces

$$y_2(x) = x^{-3}x = x^{-2} \Rightarrow y_2(x) = x^{-2}$$

Por lo tanto, la solución de la edo

$$x^2 y' + 2xy' - 2y = 0$$

Es:

$$y = k_1 y_1 + k_2 y_2 \Rightarrow y = k_1 x + k_2 x^{-2}$$

Notese que: si se considera la familia de funciones $u(x) = c_4 x^{-3} + c_3$, entonces

$$y_2(x) = ux = (c_4 x^{-3} + c_3)x$$

$$y_2(x) = c_4 x^{-2} + c_3 x \text{ , que es la solución general de la edo dada.}$$

(2)

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0; \qquad y_1(x) = x^{-1}$$

Si

$$\begin{aligned} y_2(x) = u(x) y_1(x) &\Rightarrow \\ y_2 = u x^{-1} &\Rightarrow \\ y_2' = u' x^{-1} - u x^{-2} &\Rightarrow \\ y_2'' = u'' x^{-1} - 2u' x^{-2} + 2u x^{-3} & \end{aligned}$$

Sustituyendo en

$$x^2 y_2'' + 3x y_2' + y_2 = 0$$

Se obtiene

$$
\begin{aligned}
x^2(u''x^{-1} - 2u'x^{-2}2ux^{-3}) + 3x(u'x^{-1} - ux^{-2}) + ux^{-1} = 0 \\
u''x - 2u' + 2ux^{-1} + 3u' - 3ux^{-1} + ux^{-1} = 0 \\
u''x + u' = 0
\end{aligned}
$$

Dividiendo por x

(B)
$$u'' + \frac{1}{x}u' = 0$$

Si

$$u' = w \Rightarrow u'' = \frac{dw}{dx}$$

sustituyendo en (B) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{dw}{dx} + \frac{1}{x}w = 0 \Rightarrow \\
\frac{dw}{w} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \\
\int \frac{dw}{w} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\
\ln w = -\ln x + c_1 = \ln x^{-1} + \ln c_2 = \ln(c_2x^{-1}) \Rightarrow \\
w = c_2x^{-1}
\end{aligned}
$$

Pero $w = u' = \dfrac{du}{dx} \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} = c_2x^{-1} \Rightarrow \\
u = c_2\int x^{-1}\,dx = c_2\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\
u = c_2\ln x + c_3
\end{aligned}
$$

Ya que $y_2(x) = ux^{-1}$, entonces

$$
\begin{aligned}
y_2(x) = (c_2\ln x + c_3)x^{-1} \\
y_2(x) = c_2x^{-1}\ln x + c_3x^{-1}
\end{aligned}
$$

Es la solución general de la edo dada.

Notese que la otra solución puede ser: $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

(3)

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0; \qquad y_1(x) = e^{-2x}$$

Si

$$\begin{aligned} y_2(x) &= u(x)y_1(x) \Rightarrow \\ y_2 &= ue^{-2x} \Rightarrow \\ y_2' &= u'e^{-2x} - 2ue^{-2x} \Rightarrow \\ y_2'' &= u''e^{-2x} - 4u'e^{-2x} + 4ue^{-2x} \end{aligned}$$

Sustituyendo en

$$(2x+1)y_2'' + 4xy_2' - 4y_2 = 0$$

Se obtiene

$$(2x+1)(u'' - 4u' + 4u)e^{-2x} + 4x(u' - 2u)e^{-2x} - 4ue^{-2x} = 0$$

Multiplicando por e^{2x} se tiene que

$$\begin{gathered} (2x+1)(u'' - 4u' + 4u) + 4x(u' - 2u) - 4u = 0 \\ (2x+1)u'' + (-8x - 4 + 4x)u' + (8x + 4 - 8x - 4)u = 0 \\ (2x+1)u'' + (-4x - 4)u' = 0 \end{gathered}$$

Dividiendo por $(2x+1)$

$$u'' - \frac{4x+4}{2x+1}u' = 0 \tag{C}$$

Si

$$u' = w \Rightarrow u'' = \frac{dw}{dx}$$

Sustituyendo en (C) se obtiene

$$\begin{gathered} \frac{dw}{dx} - \frac{4x+4}{2x+1}w = 0 \Rightarrow \frac{dw}{w} = \frac{4x+4}{2x+1}\,dx \Rightarrow \\ \int \frac{dw}{w} = \int \left(2 + \frac{2}{2x+1}\right) dx \Rightarrow \\ \ln w = 2x + \ln(2x+1) + c_1 \Rightarrow \\ w = e^{2x}e^{\ln(2x+1)}e^{c_1} = e^{2x}(2x+1)c_2 \Rightarrow \\ w = c_2(2x+1)e^{2x}, \text{ pero } w = \frac{du}{dx} \Rightarrow \\ u = c_2 \int (2x+1)e^{2x}\,dx \end{gathered}$$

Aplicando integración por partes se tiene que

$$u = c_2xe^{2x} + c_3$$

Ya que $y_2(x) = ue^{-2x}$, entonces

$$y_2(x) = (c_2xe^{2x} + c_3)e^{-2x}$$
$$y_2(x) = c_2x + c_3e^{-2x}$$

Es la solución general de la edo dada.

Nótese que la otra solución puede ser: $y = x$.

(4)

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0; \qquad y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x$$

Si

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= u(x)y_1(x) \Rightarrow \\
y_2 &= ux^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x \Rightarrow \\
y_2' &= u'x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x + u(x^{-\frac{1}{2}} \cos x - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sen} x) \Rightarrow \\
y_2'' &= u''x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x + 2u'(x^{-\frac{1}{2}} \cos x - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sen} x) + u(-x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x - x^{-\frac{3}{2}} \cos x + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} \operatorname{sen} x)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en

$$x^2y_2'' + xy_2' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y_2 = 0$$

Se obtiene

$$u''x^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen} x + 2u'x^{\frac{3}{2}} \cos x = 0$$

De donde

$$u'' \operatorname{sen} x + 2u' \cos x = 0 \tag{D}$$

Si $u' = w \Rightarrow u'' = \dfrac{dw}{dx}$

Sustituyendo en (D) se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dx}\operatorname{sen}x + 2w\cos x = 0 \Rightarrow& \\
\frac{dw}{dx}\operatorname{sen}x &= -2w\cos x \Rightarrow \\
\frac{dw}{w} &= -2\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\,dx \Rightarrow \\
\int \frac{dw}{w} &= -2\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\,dx \Rightarrow \\
\ln w &= -2\ln(senx) + c_1 = \ln(\operatorname{sen}x)^{-2} + \ln c_2 = \ln c_2(\operatorname{sen}x)^{-2} \Rightarrow \\
w &= c_2(\operatorname{sen}x)^{-2}
\end{aligned}$$

Pero $w = u' = \dfrac{du}{dx}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= c_2\frac{1}{\overset{2}{\operatorname{sen}}x} = c_2\csc^2 x \Rightarrow \\
u &= c_2\int \csc^2 x\,dx = c_2(-\cot x) + c_3 \Rightarrow \\
u &= -c_2\cot x + c_3 \Rightarrow \\
u &= c_4\cot x + c_3
\end{aligned}$$

Si se toma a $u = \cot x$, entonces

$$\begin{aligned}
y_2 &= ux^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}x \\
&= (\cot x)x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}x \\
&= \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}x \\
y_2 &= x^{-\frac{1}{2}}\cos x
\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la edo

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

Está dada por

$$\begin{aligned}
y(x) &= k_1y_1(x) + k_2y_2(x) \\
&= k_1x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}x + k_2x^{-\frac{1}{2}}\cos x \\
y(x) &= x^{-\frac{1}{2}}(k_1\operatorname{sen}x + k_2\cos x)
\end{aligned}$$

(5)

$$ay'' + by' + cy = 0; \qquad y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \text{ con } a,\ b,\ c \text{ constantes y } b^2 - 4ac = 0$$

Si

$$\begin{aligned} y_2(x) &= u(x)y_1(x) \Rightarrow \\ y_2 &= ue^{-\frac{b}{2a}}x \Rightarrow \\ y_2' &= u'e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}ue^{-\frac{b}{2a}x} \Rightarrow \\ y_2'' &= u''e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{a}u'e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2}ue^{-\frac{b}{2a}x} \end{aligned}$$

Sustituyendo en

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} a\left(u'' - \frac{b}{a}u' + \frac{b^2}{4a^2}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x} + b\left(u' - \frac{b}{2a}u\right)e^{-\frac{b}{2a}x} + cue^{-\frac{b}{2a}x} &= 0 \Rightarrow \\ au'' - bu' + \frac{b^2}{4a}u + bu' - \frac{b^2}{2a}u + cu &= 0 \Rightarrow \\ au'' + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)u &= 0 \Rightarrow \\ au'' + \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}u &= 0 \Rightarrow \\ au'' - \frac{b^2 - 4ac}{4a}u &= 0 \Rightarrow \\ au'' &= 0 \Rightarrow \\ u'' &= 0 \Rightarrow \\ u' &= c_1 \Rightarrow \\ u &= c_1x + c_2 \end{aligned}$$

Si se considera que $u = x$, entonces

$$y_2 = xe^{-\frac{b}{2a}x}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = (c_1x + c_2)e^{-\frac{b}{2a}x}$$