ECUACIONES DIFERENCIALES
EXAMEN GLOBAL E0500

Primera Parte

(1) Calcule la solución de las ecuaciones diferenciales:

(a) $(x^3 - 3xy^2)\,dx + (y^3 - 3x^2y)\,dy = 0$
(b) $xyy' - y^2 = x^4$
(c) $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0$

(2) Supóngase que un accidente nuclear ha dejado que el nivel de cobalto radioactivo ascienda en cierta región a 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuánto tiempo pasará para que la región vuelva a ser habitable? Justifique su respuesta.
Nota: La vida media del cobalto radioactivo es de 5.27 años.

(3) En un tanque que contiene 1000 galones de agua se vierten por bombeo desperdicios industriales a un gasto de 1 gal/min, y la solución mezclada sale del tanque con la misma rapidez. ¿Cuánto tiempo es necesario para que la concentración alcance el 20%? Justifique su respuesta.

Segunda Parte

(1) (a) Verifique que las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo indicado.
$x^2y'' + xy' + y = 0$
$y_1 = \cos(\ln x)$
$y_2 = \operatorname{sen}(\ln x)$
$0 < x < +\infty$

(b) Verifique que la función $\widehat{y} = \operatorname{sen}\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right)$ es otra solución. Encuentre constantes c_1, c_2 tales que $\widehat{y} = c_1y_1 + c_2y_2$

(2) Calcule la solución general de la ecuación diferencial:

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$$

donde $y_1 = x^3 \ln x$ es una solución.

(3) Empleando el método de coeficientes indeterminados. Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}$$

(4) Calcule la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

canek.azc.uam.mx: 21/ 10/ 2003.

Tercera Parte

(1) Un peso de 4 libras cuelga del extremo inferior de un resorte que está suspendido verticalmente desde un punto fijo. El peso se encuentra en reposo en su posición de equilibrio y el resorte está estirado 8 pulgadas. Después, el peso se desplaza una cierta distancia hacia abajo de su posición de equilibrio y se suelta en $t = 0$. El medio ofrece una resistencia en libras numéricamente igual a $\beta\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$, donde $\beta > 0$ y $\dfrac{dx}{dt}$ es la velocidad instantánea en pies por segundo. ¿Cuál debe ser el valor de β para que el movimiento sea sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado? Justifique sus respuestas.

(2) Un cuerpo que pesa 4 lb se sujeta a un resorte cuya constante es 2 lb/pie. El medio ofrece una resistencia al movimiento del cuerpo numéricamente igual a la velocidad instantánea. El cuerpo se suelta desde un punto que está 1 pie sobre la posición de equilibrio con una velocidad de 8 pie/s, dirigida hacia abajo.

(a) Determinar el instante en que el cuerpo pasa por la posición de equilibrio.

(b) Encuentre el instante en que el citado cuerpo alcanza su desplazamiento extremo después de haber pasado por la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición del cuerpo en dicho instante?

(3) Una masa de 1 slug está suspendida de un resorte cuya constante es 6 lb/pie. El sistema se pone en movimiento en un medio que opone una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a dos veces la velocidad instantánea. Encuentre la solución estacionaria que aplica al sistema, a partir de $t = 0$, una fuerza exterior $F(t) = 40 \operatorname{sen} 2t$. Escriba esta solución como un múltiplo constante de $\operatorname{sen}(2t + \theta)$.