ECUACIONES DIFERENCIALES
COEFICIENTES INDETERMINADOS E0100

Utilizando el método de coeficientes indeterminados, calcular una solución particular y escribir la solución general de la edo.

(1)
$$y'' - 4y' + 4y = 12x^2 - 40x + 42$$

(2)
$$y'' - 4y' + 4y = 4(2x - 1)e^{4x}$$

(3)
$$y'' - 4y' + 4y = -80\,\mathrm{sen}\,3x - 23\cos 3x$$

(4)
$$y'' - 4y' = 12x^2 - 40x + 42$$

(5)
$$y'' - 5y' + 4y = (12x - 5)e^{4x}$$

(6)
$$y'' - 4y' + 4y = 2(9x - 2)e^{2x}$$

(7)
$$y'' + 4y = 16\,\mathrm{sen}\,2x + 12\cos 2x$$

---

canek.uam.mx: 21/ 4/ 2003.

Respuestas

Utilizando el método de coeficientes indeterminados, calcular una solución particular y escribir la solución general de la edo.

(1) $y'' - 4y' + 4y = 12x^2 - 40x + 42$

Primero se obtiene la solución general de la edo. homogénea asociada (solución complementaria $y_c(x)$):

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Proponiendo $y = e^{\mu x}$ se obtiene

$$\mu^2 - 4\mu + 4 = (\mu - 2)^2 = 0$$

Cuya solución es $\mu = 2$, de multiplicidad 2, entonces

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

Segundo, se obtiene una solución particular $y_p(x)$ de la no-homogénea

$$y'' - 4y' + 4y = 12x^2 - 40x + 42$$

Aquí el término no homogéneo es un polinomio de grado 2, además, se tiene a y con coeficiente $4 \neq 0$.
Se propone como solución particular a

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Con A, B, C coeficientes a determinarse.
Si

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow y_p' = 2Ax + B \Rightarrow y_p'' = 2A$$

Sustituyendo en

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = 12x^2 - 40x + 42, \text{ se obtiene}$$
$$2A - 4(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = 12x^2 - 40x + 42$$

Asociando respecto a x

$$(4A)x^2 + (-8A + 4B)x + (2A - 4B + 4C) = 12x^2 - 40x + 42$$

Igualdad que se cumple cuando

$$\begin{cases} 4A = 12 \\ -8A + 4B = -40 \\ 2A - 4B + 4C = 42 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones que tiene por solución a

$$A = 3, B = -4 \text{ y } C = 5$$

Entonces, la solución particular es

$$y_p(x) = 3x^2 - 4x + 5$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = y_p(x) + y_c(x)$$
$$y = 3x^2 - 4x + 5 + (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

(2) $y'' - 4y' + 4y = 4(2x-1)e^{4x}$

Por el ejercicio anterior se sabe que la solución general de la homogénea asociada, es

$$y_c = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

Para obtener una solución particular $y_p(x)$ de la no-homogénea

$$y'' - 4y' + 4y = 4(2x-1)e^{4x} = (8x-4)e^{4x}$$

Debe considerarse que: el término no homogéneo es un polinomio de grado uno por e^{4x} y que, además, e^{4x} no es solución de la homogénea asociada.
Se propone como solución particular a

$$y_p(x) = (Ax + B)e^{4x}$$

Con A, B coeficientes a determinarse.

Si

$$y_p = (Ax+B)e^{4x} \Rightarrow y_p' = 4(Ax+B)e^{4x} + Ae^{4x} \Rightarrow y_p'' = 16(Ax+B)e^{4x} + 8Ae^{4x}$$

Sustituyendo en

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = (8x-4)e^{4x}, \text{ se obtiene}$$

$$[16(Ax+B) + 8A]e^{4x} - 4[4(Ax+B) + A]e^{4x} + 4(Ax+B)e^{4x} = (8x-4)e^{4x}$$

Eliminando e^{4x} y asociando respecto a x

$$(4A)x + (4A + 4B) = 8x - 4$$

Igualdad que se cumple cuando

$$\begin{cases} 4A = 8 \\ 4A + 4B = -4 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones que tiene por solución a $A = 2$ y $B = -3$
Entonces, la solución particular es

$$y_p(x) = (2x - 3)e^{4x}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = y_p(x) + y_c(x)$$
$$y = (2x-3)e^{4x} + (c_1 + c_2)e^{2x}$$

(3) $y'' - 4y' + 4y = -80 \operatorname{sen} 3x - 23 \cos 3x$

Por el ejercicio 1 (y anterior) se sabe que la solución general de la homogénea asociada, es

$$y_c(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

Para obtener una solución particular $y_p(x)$ de la no homogénea

$$y'' - 4y' + 4y = -80 \operatorname{sen} 3x - 23 \cos 3x$$

Debe considerarse que: el término no homogéneo es una combinación lineal de $\operatorname{sen} 3x$ y $\cos 3x$, y que estas funciones no son soluciones de la homogénea asociada.
Se propone como solución particular a

$$y_p(x) = A \operatorname{sen} 3x + B \cos 3x$$

Con A, B coeficientes a determinarse.
Si

$$y_p = A \operatorname{sen} 3x + B \cos 3x \Rightarrow y_p' = 3A \cos 3x - 3B \operatorname{sen} 3x \Rightarrow y_p'' = -9A \operatorname{sen} 3x - 9B \cos 3x$$

Sustituyendo en

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = -80 \operatorname{sen} 3x - 23 \cos 3x$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} &[-9A \operatorname{sen} 3x - 9B \cos 3x] - 4[3A \cos 3x - 3B \operatorname{sen} 3x] + 4[A \operatorname{sen} 3x + B \cos 3x] = \\ &\qquad = -80 \operatorname{sen} 3x - 23 \cos 3x \end{aligned}$$

Asociando términos respecto a $\operatorname{sen} 3x$ y $\cos 3x$

$$(-5A + 12B) \operatorname{sen} 3x + (-12A - 5B) \cos 3x = -80 \operatorname{sen} 3x - 23 \cos 3x$$

Igualdad que se cumple cuando

$$\begin{cases} -5A + 12B = -80 \\ -12A - 5B = -23 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones que tiene por solución a

$$A = 4 \text{ y } B = -5$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = 4 \operatorname{sen} 3x - 5 \cos 3x$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = y_p(x) + y_c(x)$$

$$y = 4 \operatorname{sen} 3x - 5 \cos 3x + (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

(4) $y'' - 4y' = 12x^2 - 40x + 42$

Primero se obtiene la solución general de $y'' - 4y' = 0$. Proponiendo $y = e^{\mu x}$ se obtiene $\mu^2 - 4\mu = 0$ cuyas soluciones son $\mu = 0$ y $\mu = 4$ entonces

$$y_c(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{4x} = c_1 + c_2 e^{4x}$$

Para obtener una solución particular $y_p(x)$ de

$$y'' - 4y' = 12x^2 - 40x + 42$$

Debe considerarse que el término no-homogéneo es un polinomio de grado 2 y que el término en y tiene coeficientes cero (en la edo $y'' - 4y' = 0$ no aparece el término en y). Se propone como solución particular a

$$y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C)$$

Con A, B, C coeficientes a determinarse.
Si $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx \Rightarrow y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C \Rightarrow y_p'' = 6Ax + 2B$
Sustituyendo en

$$y_p'' - 4y_p' = 12x^2 - 40x + 42, \text{ se obtiene}$$

$$6Ax + 2B - 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = 12x^2 - 40x + 42$$

Asociando términos, respecto a x,

$$(-12A)x^2 + (6A - 8B)x + (2B - 4C) = 12x^2 - 40x + 42$$

Igualdad que se cumple cuando

$$\begin{cases} -12A = 12 \\ 6A - 8B = -40 \\ 2B - 4C = 42 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones que tiene por solución a

$$A = -1, B = \frac{17}{4}, \text{ y } C = -\frac{67}{8}$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = -x^3 + \frac{17}{4}x^2 - \frac{67}{8}x$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = y_p(x) + y_c(x)$$

$$y = -x^3 + \frac{17}{4}x^2 - \frac{67}{8}x + c_1 + c_2 e^{4x}$$

(5) $y'' - 5y' + 4y = (12x - 5)e^{4x}$

La solución general de la homogénea asociada es

$$y_c(x) = c_1e^x + c_2e^{4x}$$

Para obtener una solución particular $y_p(x)$ de

$$y'' - 5y' + 4y = (12x - 5)e^{4x}$$

Debe considerarse que el término no homogéneo es un polinomio de grado uno por e^{4x} y además que e^{4x} es solución de la homogénea asociada.
Se propone como solución particular a

$$y_p(x) = x(Ax + B)e^{4x}$$

Con A, B coeficientes a determinarse.

$$\begin{aligned} \text{si } y_p &= (Ax^2 + Bx)e^{4x} \Rightarrow \\ y_p' &= 4(Ax^2 + Bx)e^{4x} + (2Ax + B)e^{4x} \Rightarrow \\ y_p'' &= 16(Ax^2 + Bx)e^{4x} + 8(2Ax + B)e^{4x} + 2Ae^{4x} \end{aligned}$$

Sustituyendo en

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = (12x - 5)e^{4x}$$

Eliminando e^{4x}, simplificando y asociando términos respecto a x, se obtiene

$$(6A)x + (2A + 3B) = 12x - 5$$

Igualdad que se cumple cuando

$$\begin{cases} 6A = 12 \\ 2A + 3B = -5 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones que tiene por solución a

$$A = 2 \text{ y } B = -3$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = (2x^2 - 3x)e^{4x} = x(2x - 3)e^{4x}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = y_p(x) + y_c(x)$$

$$y = (2x^2 - 3x)e^{4x} + c_1e^x + c_2e^{4x}$$

(6) $y'' - 4y' + 4y = 2(9x - 2)e^{2x}$

La solución complementaria es

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

Para obtener una solución particular $y_p(x)$ de

$$y'' - 4y' + 4y = 2(9x - 2)e^{2x}$$

Debe considerarse que el término no-homogéneo es un polinomio de grado uno por e^{2x}, además que e^{2x}y xe^{2x} Son soluciones de la homogénea asociada.
Se propone como solución particular a

$$y_p(x) = x^2(Ax + B)e^{2x}$$

Con A, B coeficientes a determinarse.

Si

$$\begin{aligned} y_p &= (Ax^3 + Bx^2)e^{2x} \Rightarrow \\ y_p' &= 2(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} + (3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} \Rightarrow \\ y_p'' &= 4(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} + 4(3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + (6Ax + 2B)e^{2x} \end{aligned}$$

Sustituyendo en

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = 2(9x - 2)e^{2x} = (18x - 4)e^{2x}$$

Eliminando e^{2x}, simplificando y asociando términos respaecto a x, se obtiene

$$(6A)x + 2B = 18x - 4$$

Igualdad que se cumple cuando

$$\begin{cases} 6A = 18 \\ 2B = -4 \end{cases}$$

Cuya solución es

$$A = 3 \text{ y } B = -2$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = x^2(3x - 2)e^{2x} = (3x^3 - 2x^2)e^{2x}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = y_p(x) + y_c(x)$$

$$y = (3x^3 - 2x^2)e^{2x} + (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

(7) $y'' + 4y = 16 \operatorname{sen} 2x + 12 \cos 2x$

La solución complementaria es

$$y_c(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$$

Para obtener una solución particular $y_p(x)$ de

$$y'' + 4y = 16 \operatorname{sen} 2x + 12 \cos 2x$$

Debe considerarse que el término no-homogéneo es una combinación lineal de $\operatorname{sen} 2x$ y $\cos 2x$; además, que estas funciones son soluciones de la homogénea asociada.
Se propone como solución particular a

$$y_p(x) = Ax \operatorname{sen} 2x + Bx \cos 2x$$

Con A, B coeficientes a determinarse.

Si

$$\begin{aligned} y_p &= Ax \operatorname{sen} 2x + Bx \cos 2x \Rightarrow \\ y_p' &= (-2Bx + A) \operatorname{sen} 2x + (2Ax + B) \cos 2x \Rightarrow \\ y_p'' &= (-4Ax - 4B) \operatorname{sen} 2x + (-4Bx + 4A) \cos 2x \end{aligned}$$

Sustituyendo en

$$y_p'' + 4y_p = 16 \operatorname{sen} 2x + 12 \cos 2x$$

Simplificando y asociando términos respecto a $\operatorname{sen} 2x$ y $\cos 2x$, se obtiene

$$(-4B) \operatorname{sen} 2x + 4A \cos 2x = 16 \operatorname{sen} 2x + 12 \cos 2x$$

Igualdad que se cumple cuando

$$\begin{cases} -4B = 16 \\ 4A = 12 \end{cases}$$

Cuya solución es

$$A = 3 \text{ y } B = -4$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = 3x \operatorname{sen} 2x - 4x \cos 2x$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = y_p(x) + y_c(x)$$

$$y = 3x \operatorname{sen} 2x - 4x \cos 2x + c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$$