CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.7.8 Desigualdades tipo $ax^2 + bx + c \geq 0$ con $a \neq 0$

Se considera $a \neq 0$ ya que $a = 0$ nos daría una desigualdad del tipo $bx + c \geq 0$ estudiado.
Para resolver en general la desigualdad $ax^2 + bx + c \geq 0$, nos apoyaremos en las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, que están dadas por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Aquí, de acuerdo con el signo del discriminante $b^2 - 4ac$, pueden ocurrir tres casos:

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces

   $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos raíces reales y distintas que son

   $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ \& } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ donde } x_1 \neq x_2;$$
   $$x_1 > x_2 \text{ que se tiene cuando } a > 0 \quad \text{así como} \quad x_1 < x_2 \text{ cuando } a < 0.$$

   Por lo tanto:

   $$ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0 \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) \geq 0 \text{ si } a > 0 \text{ o bien } (x - x_1)(x - x_2) \leq 0 \text{ si } a < 0.$$

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

- Consideremos $a > 0$.

$ax^2 + bx + c \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (x - x_1)(x - x_2) \geq 0$ se cumple si:

$x - x_1 \geq 0 \;\&\; x - x_2 \geq 0$ o bien $x - x_1 \leq 0 \;\&\; x - x_2 \leq 0$.

A su vez estas desigualdades se cumplen si:

$x \geq x_1 \;\&\; x \geq x_2$ o bien $x \leq x_1 \;\&\; x \leq x_2$.

O en términos de intervalos (recuerde que $x_1 > x_2$).

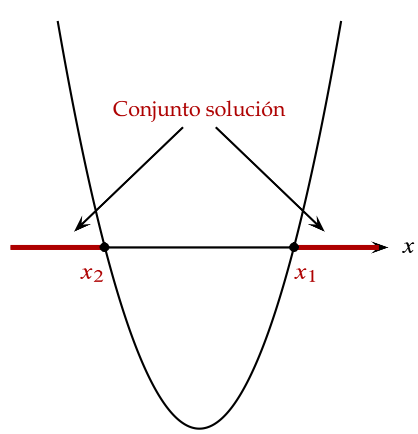
$x \in [x_1, +\infty) \;\&\; x \in [x_2, +\infty)$ o bien $x \in (-\infty, x_1] \;\&\; x \in (-\infty, x_2]$;

$x \in [x_1, +\infty)$ o bien $x \in (-\infty, x_2]$.

Por lo que el conjunto solución de $ax^2 + bc + c \geq 0$ (para el caso $a > 0$) es

$$CS = (-\infty, x_2] \bigcup [x_1, +\infty) = \mathbb{R} - (x_2, x_1)\ .$$

Tenemos



- Consideremos $a < 0$.

$ax^2 + bx + c \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (x - x_1)(x - x_2) \leq 0$ se cumple si:

$x - x_1 \geq 0 \;\&\; x - x_2 \leq 0$ o bien $x - x_1 \leq 0 \;\&\; x - x_2 \geq 0.$

A su vez estas desigualdades se cumplen si:

$x \geq x_1 \;\&\; x \leq x_2$ o bien $x \leq x_1 \;\&\; x \geq x_2.$

O en términos de intervalos (recuerde que $x_1 < x_2$).

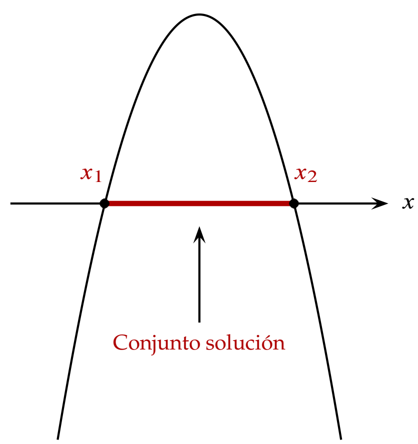
$x \in [x_1, +\infty) \;\&\; x \in (-\infty, x_2]$ o bien $x \in (-\infty, x_1] \;\&\; x \in [x_2, +\infty)\,;$

$x \in [x_1, +\infty) \bigcap (-\infty, x_2] = [x_1, x_2]$ o bien $x \in (-\infty, x_1] \bigcap [x_2, +\infty) = \emptyset.$

Luego, el conjunto solución de $(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$ que es el de $ax^2 + bx + c \geq 0$ (para el caso $a < 0$) es

$$CS = [x_1, x_2] \bigcup \emptyset = [x_1, x_2]\,.$$

Tenemos



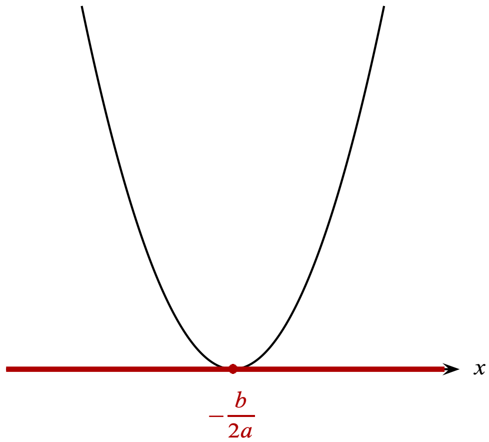
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces

$ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única raíz real (doble): $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ y además

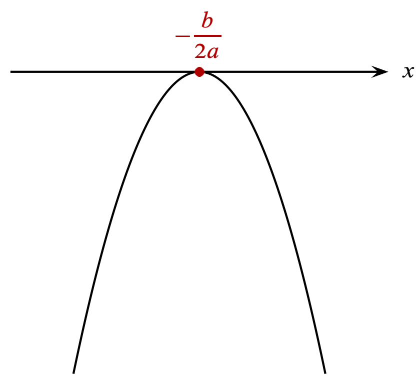
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Como $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$:

- Si $a > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ y su conjunto solución es $\mathbb{R}$. Tenemos



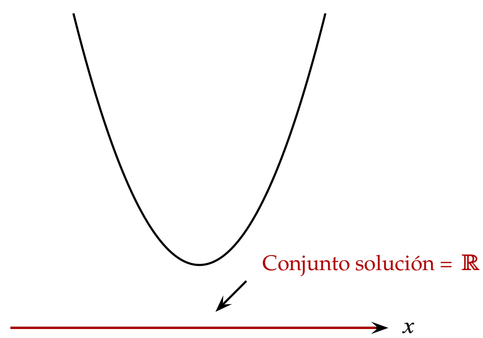
- Si $a < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, sólo se cumplirá $ax^2 + bx + c \geq 0$ cuando sea $ax^2 + bx + c = 0$, es decir, cuando $x = -\dfrac{b}{2a}$, por lo que el conjunto solución es $\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$, que consta de un solo punto.



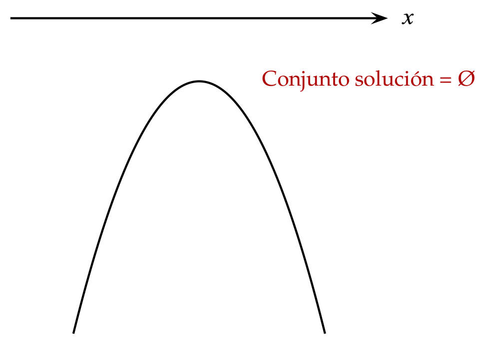
3. Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces

   $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíz real alguna. Es decir, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $ax^2 + bx + c \neq 0$ por lo que sucede uno de los casos siguientes:

   a. La cuadrática siempre es positiva, en cuyo caso el conjunto solución es $\mathbb{R}$ si, por ejemplo, el valor de $ax^2 + bx + c$ para $x = 0$ que es $c > 0$.



b. La cuadrática nunca es positiva, entonces el conjunto solución es $\emptyset$, si $c < 0$ (no existen soluciones).



Ejemplo 1.7.1 *Resolver la desigualdad* $2x^2 + x - 6 \geq 0$.

▼ Primero resolvemos la ecuación $2x^2 + x - 6 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}.$$

Aquí aparecen dos raíces reales diferentes que son

$$x_1 = \frac{-1+7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \ \& \ x_2 = \frac{-1-7}{4} = \frac{-8}{4} = -2.$$

Entonces la factorización del trinomio cuadrático es

$$2x^2 + x - 6 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)[x - (-2)] = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+2).$$

Luego resolvemos la desigualdad:

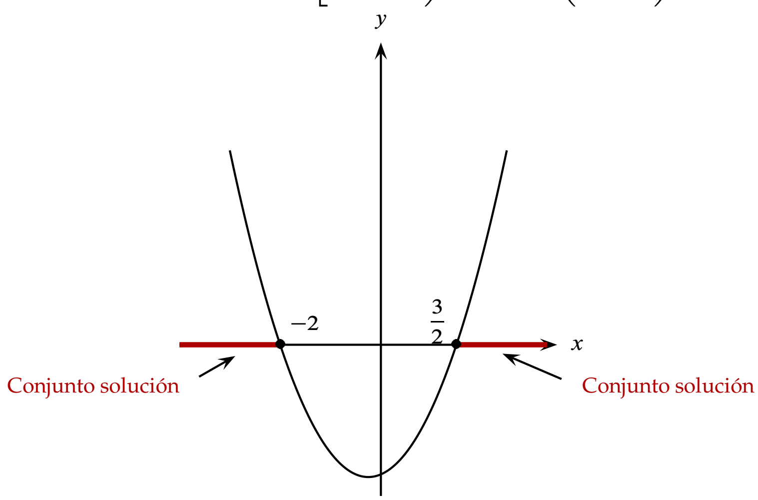
$$2x^2 + x - 6 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+2) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ \left(x - \frac{3}{2}\right)(x+2) \geq 0, \text{(ya que } 2 > 0) \ \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ x - \frac{3}{2} \leq 0 \ \& \ x + 2 \leq 0 && \text{o bien} \quad x - \frac{3}{2} \geq 0 \ \& \ x + 2 \geq 0 \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ x \leq \frac{3}{2} \ \& \ x \leq -2 && \text{o bien} \quad x \geq \frac{3}{2} \ \& \ x \geq -2 \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \ \& \ x \in (-\infty, -2] && \text{o bien} \quad x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \ \& \ x \in [-2, +\infty) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \bigcap (-\infty, -2] && \text{o bien} \quad x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \bigcap [-2, +\infty) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ x \in (-\infty, -2] && \text{o bien} \quad x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \ \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ x \in (-\infty, -2] \bigcup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Por lo tanto el conjunto solución de la desigualdad $2x^2 + x - 6 \geq 0$ es

$$CS = (-\infty, -2] \bigcup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(-2, \frac{3}{2}\right).$$



□

Ejemplo 1.7.2 *Resolver la desigualdad* $4x^2 - 4x + 1 > 0.$

▼ Primero resolvemos la ecuación $4x^2 - 4x + 1 = 0$:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(1)}}{2(4)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Aquí se tiene una única raíz real (doble) que es $x = \frac{1}{2}$.

Entonces la factorización del trinomio cuadrático es

$$4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Lo cual se puede ver directamente pues

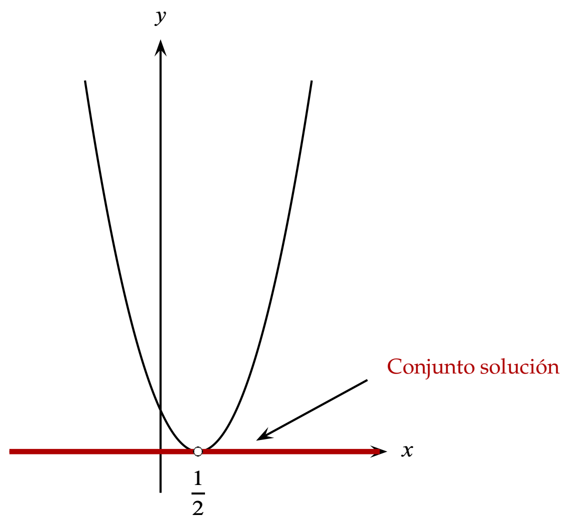
$$4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Luego resolvemos la desigualdad:

$$4x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \text{ ya que } 4 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto el conjunto solución es

$$CS = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$



□

Ejemplo 1.7.3 *Resolver la desigualdad* $x^2 + 2x + 2 \le 0$.

▼ Resolvemos la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}.$$

Aquí no se tienen raíces reales, ya que $\sqrt{-4}$ no es un número real. Esto nos indica que para ningún número real x sucede la igualdad $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Tenemos entonces, como veremos posteriormente, que para cada número real x se cumple

$$x^2 + 2x + 2 < 0 \text{ o bien } x^2 + 2x + 2 > 0.$$

Como $x = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 2x + 2 = 0^2 + 2(0) + 2 = 2 \;\Rightarrow$

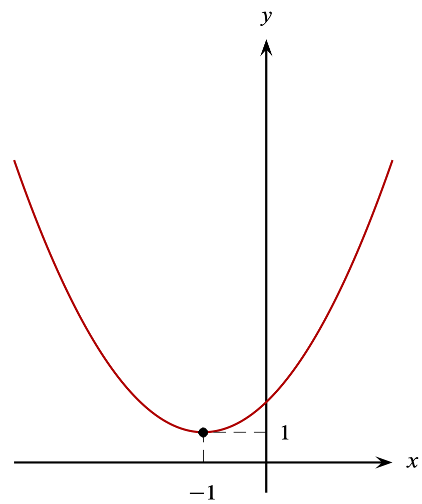
$$\Rightarrow \text{ siempre se cumple que } x^2 + 2x + 2 > 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{ nunca se cumple que } x^2 + 2x + 2 \le 0.$$

El conjunto solución de $x^2 + 2x + 2 \le 0$ es:

$$CS = \varnothing\,.$$

También se puede ver directamente pues

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1 > 0 \text{ siempre.}$$



□

Ejemplo 1.7.4 *Resolver la desigualdad* $x^2 - 2x - 15 < 0$.

▼ Resolvemos la ecuación $x^2 - 2x - 15 = 0$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}.$$

Aquí se tienen dos raíces reales diferentes, que son

$$x_1 = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ y } x_2 = \frac{2-8}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Entonces, la factorización del trinomio cuadrático es

$$x^2 - 2x - 15 = (x-5)[x-(-3)] = (x-5)(x+3).$$

La cual también podemos hacer directamente.
Resolvemos la desigualdad:

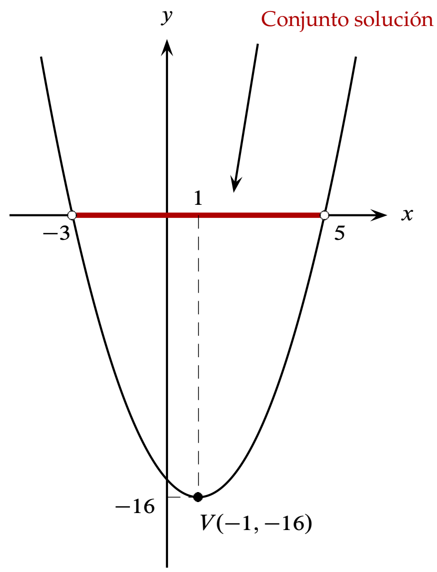
$$x^2 - 2x - 15 < 0 \;\Leftrightarrow\; (x-5)(x+3) < 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{lcr}
\Leftrightarrow\; x - 5 < 0 \;\&\; x + 3 > 0 & \text{o bien} & x - 5 > 0 \;\&\; x + 3 < 0 \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\; x < 5 \;\&\; x > -3 & \text{o bien} & x > 5 \;\&\; x < -3 \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, 5) \;\&\; x \in (-3, +\infty) & \text{o bien} & x \in (5, +\infty) \;\&\; x \in (-\infty, -3) \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\; x \in (-3, 5) & \text{o bien} & x \in (5, +\infty) \bigcap (-\infty, -3) = \varnothing \;\Rightarrow
\end{array}$$

$$\Rightarrow\; x \in (-3, 5) \bigcup \varnothing \;\Rightarrow\; x \in (-3, 5)\,.$$

Por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo

$$CS = (-3, 5)\ .$$



□

Solución geométrica

$y = ax^2 + bx + c$ es una parábola de eje paralelo al de las y, que dirige su concavidad hacia arriba si $a > 0$ o bien hacia abajo si $a < 0$.
El vértice de esta parábola se puede determinar escribiendo

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

Completando el binomio $\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$ de forma que sea un trinomio cuadrado perfecto y restando lo mismo que sumamos, para no alterar la igualdad, tenemos que:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow \\ \Rightarrow\ y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2, \end{aligned}$$

que es la ecuación de una parábola con eje vertical y vértice en el punto de coordenadas:

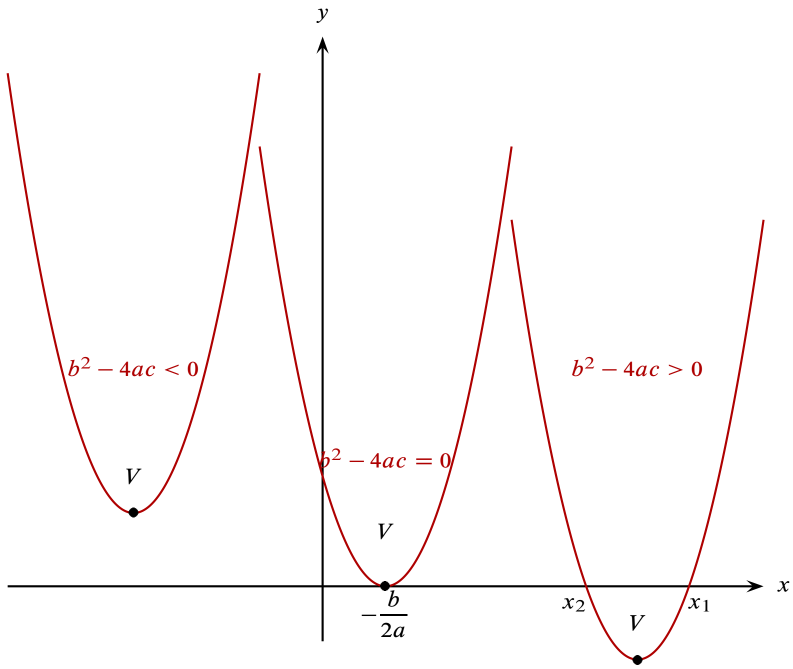
$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba y si $a < 0$, se abre hacia abajo.
Este vértice puede estar encima del eje de las x, en el eje x o debajo, dependiendo si

$$c - \frac{b^2}{4a} >, =, \text{ o bien } < 0,$$

por lo que las parábolas quedan de la siguiente forma:

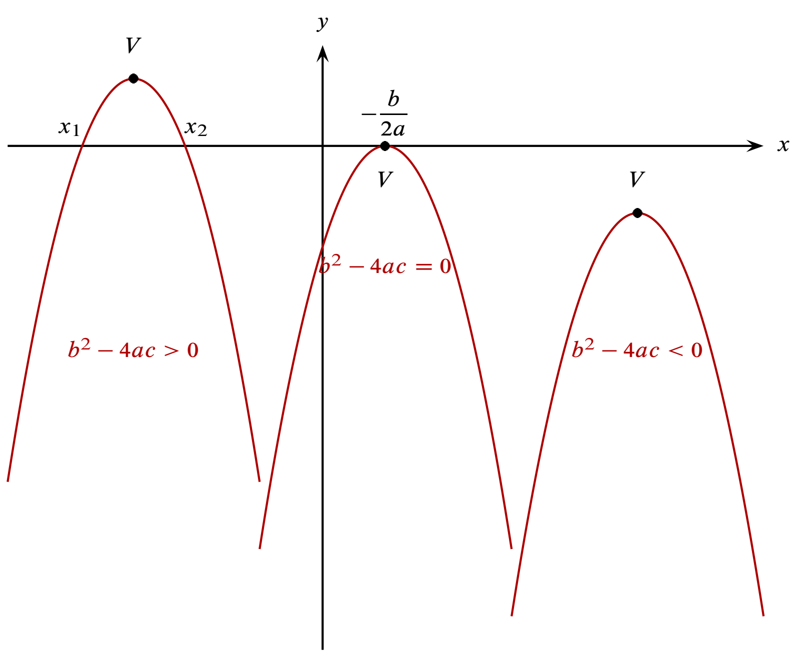
1. $a > 0$.



   Y el conjunto solución de $ax^2 + bx + c \geq 0$ por lo tanto es $\mathbb{R}$ en los dos primeros casos, es decir, si $b^2 - 4ac \leq 0$.

   El conjunto solución es $(-\infty, x_2] \bigcup [x_1, +\infty)$ si $b^2 - 4ac > 0$ donde $x_2 < x_1$ son las dos soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$.

2. $a < 0$.



En el primer caso si $b^2 - 4ac > 0$, el conjunto solución es $[x_1, x_2]$, donde nuevamente x_1 & x_2 son las dos raíces reales y distintas de $ax^2 + bx + c = 0$.

Si $b^2 - 4ac = 0$, el conjunto solución consta de un solo punto $\left\{ -\dfrac{b}{2a} \right\}$.

Y si $b^2 - 4ac < 0$, el conjunto solución de $ax^2 + bx + c \geq 0$ es el conjunto $\varnothing$.

Ejemplo 1.7.5 *Resolver geométricamente la desigualdad* $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$.

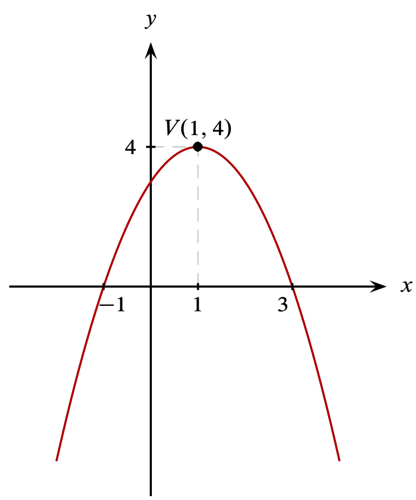
▼ Notamos que $y = -x^2 + 2x + 3$ es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde $a = -1$, $b = 2$ & $c = 3$. Aquí $a < 0$ ya que $a = -1$, por lo cual $y = -x^2 + 2x + 3$ es una parábola de eje vertical que se abre hacia abajo a partir de su vértice V.

$$y = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x) + 3 = -(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 3;$$
$$y = -(x^2 - 2x + 1) + 1 + 3 = -(x - 1)^2 + 4;$$
$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ \& } x = 1 \Rightarrow y = 4, \text{ por lo que } V(1, 4) \text{ es el vértice.}$$

Visualizamos la parábola, en el plano cartesiano, abriéndose hacia abajo desde el vértice $V(1, 4)$. Vemos la conveniencia de resolver la ecuación $-x^2 + 2x + 3 = 0$.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-2 + 4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \text{ y } x_2 = \frac{-2 - 4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Se tiene entonces una parábola donde $y \geq 0$, cuando $-1 \leq x \leq 3$; es decir $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$, cuando $-1 \leq x \leq 3$.



Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad original es

$$CS = [-1, 3].$$

□

Desigualdades tipo $a_1x^2 + b_1x + c_1 \ge a_2x^2 + b_2x + c_2$ con $a_1 \ne a_2$

(Si $a_1 = a_2$, trasponiendo los términos al primer miembro y reduciéndolos, nos quedaría una desigualdad del tipo $bx + c \ge 0$, si $b_1 \ne b_2$. Si también $b_1 = b_2$, nos queda la desigualdad $c_1 \ge c_2$ que puede ser verdadera o no; en el primer caso el conjunto solución sería $\mathbb{R}$ y en el segundo $\varnothing$.)
Transponiendo los términos, nuestra desigualdad la podemos escribir de la forma

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 - (a_2x^2 + b_2x + c_2) \ge 0.$$

Esto es

$$(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2) \ge 0.$$

Que es del tipo $ax^2 + bx + c \ge 0$ anterior.

Ejemplo 1.7.6 *Resolver la desigualdad* $3x^2 - 4x + 5 \le 9x - 3x^2 + 10$.

▼

$$3x^2 - 4x + 5 \le 9x - 3x^2 + 10 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 4x + 5 - 9x + 3x^2 - 10 \le 0 \;\Leftrightarrow\; 6x^2 - 13x - 5 \le 0.$$

Resolvemos la ecuación $6x^2 - 13x - 5 = 0$.

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(6)(-5)}}{2(6)} = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 120}}{12} =$$
$$= \frac{13 \pm \sqrt{289}}{12} = \frac{13 \pm 17}{12} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{13 + 17}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} \text{ y } x_2 = \frac{13 - 17}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

La factorización del trinomio cuadrático es

$$6x^2 - 13x - 5 = 6\left(x - \frac{5}{2}\right)\left[x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = 6\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right).$$

Resolvemos la desigualdad

$$6x^2 - 13x - 5 \le 0 \;\Leftrightarrow\; 6\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \le 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x - \frac{5}{2} \le 0 \;\&\; x + \frac{1}{3} \ge 0 \qquad \text{o bien} \qquad x - \frac{5}{2} \ge 0 \;\&\; x + \frac{1}{3} \le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \le \frac{5}{2} \;\&\; x \ge -\frac{1}{3} \qquad \text{o bien} \qquad x \ge \frac{5}{2} \;\&\; x \le -\frac{1}{3} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right] \;\&\; x \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right) \qquad \text{o bien} \qquad x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) \;\&\; x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right] \bigcap \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right) \qquad \text{o bien} \qquad x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \bigcap \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right] \qquad \text{o bien} \qquad x \in \varnothing \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right] \bigcup \emptyset \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right].$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad original es

$$CS = \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right].$$

□

Ejemplo 1.7.7 *Resolver la desigualdad* $2x^2 - 3x + 4 > x^2 - 5x + 2$.

▼

$$2x^2 - 3x + 4 > x^2 - 5x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4 - x^2 + 5x - 2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 > 0.$$

Esta desigualdad, como consecuencia de lo que vimos en el ejemplo 1.7.3 página 7 (que $x^2+2x+2 \leq 0$ nunca se cumple), siempre se cumple. Por lo tanto el conjunto solución de la desigualdad original es

$$CS = \mathbb{R}.$$

□

Geométricamente resolver la desigualdad:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 \geq a_2x^2 + b_2x + c_2, \text{ con } a_1 \neq a_2$$

quiere decir hallar las x tales que la parábola $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ no está abajo de la parábola $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$.

Ejemplo 1.7.8 *Geométricamente, resolver la desigualdad:*

$$2 - 2x - 4x^2 \geq 2x^2 + 9x + 5.$$

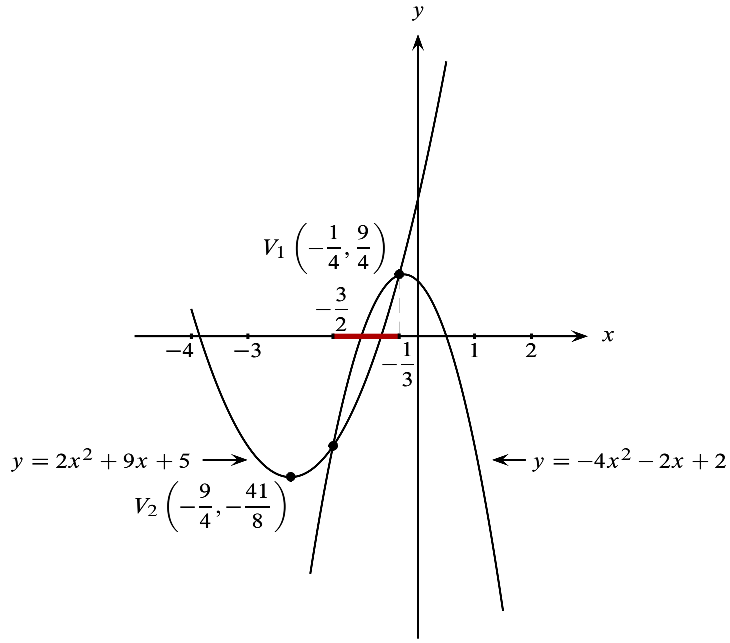
▼ Completando un trinomio cuadrado perfecto en cada caso, determinamos el vértice de cada parábola.

$$-4x^2 - 2x + 2 = -4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) + 2 + \frac{1}{4} = -4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{4};$$
$$2x^2 + 9x + 5 = 2\left(x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{81}{16}\right) + 5 - \frac{81}{8} = 2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{41}{8}.$$

La parábola $y = -4x^2 - 2x + 2$ se abre hacia abajo (por ser $a = -4 < 0$) a partir de su vértice $V_1\left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$ y la parábola $y = 2x^2 + 9x + 5$ se abre hacia arriba (por ser $a = 2 > 0$) a partir de su vértice $V_2\left(-\frac{9}{4}, -\frac{41}{8}\right)$.

Las parábolas se intersecan cuando $2x^2+9x+5 = -4x^2-2x+2$. Esto sucede cuando $6x^2+11x+3 = 0$, es decir, cuando

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 72}}{12} = \frac{-11 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-11 \pm 7}{12} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{2}. \end{cases}$$



Conjunto solución:

$$CS = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right],$$

donde $-\frac{3}{2}$ y $-\frac{1}{3}$ son las abscisas de los puntos de intersección de las dos parábolas: $y = 2 - 2x - 4x^2$; $y = 2x^2 + 9x + 5$ y en el intervalo $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right]$ la primera no está abajo de la segunda.

□

Ejercicios 1.7.8 *Soluciones en la página 15*

Resolver las siguientes desigualdades:

1. $x^2 - 5x + 4 > 0$.
2. $x^2 - 4x - 12 < 0$.
3. $9x^2 - 4 \geq 0$.
4. $1 - x^2 \leq 0$.
5. $2x^2 + 5x + 2 > 0$.
6. $2x^2 + 5x - 3 < 0$.
7. $3x^2 - x - 2 \geq 0$.
8. $3x^2 + 7x - 6 \leq 0$.
9. $2x^2 + 9x + 5 \leq 2 - 2x - 4x^2$.
10. $-3x^2 + 3x - 2 > 4x - 9x^2 - 1$.
11. $4x^2 - 2x + 1 \geq 10x^2 + 3x - 5$.
12. $2x^2 + 3x - 4 < x^2 + x - 6$.
13. $2x^2 - 3x < x^2 \leq 2x^2 - 4$.
14. $2x^2 + 7x - 5 \leq 2x - 2$.
15. $\dfrac{3x^2 - 27}{5 - 3x} \geq 0$.
16. $x^2 + 3x - 6 \geq 2$.
17. $3x - 3x^2 - 2 \geq 4x - 9x^2 - 1$.

Ejercicios 1.7.8 *Desigualdades del tipo: $ax^2 + bx + c \geq 0$ con $a \neq 0$, página 14*

1. $(-\infty, 1) \bigcup (4, +\infty) = \mathbb{R} - [1, 4]$.
2. $(-2, 6)$.
3. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
4. $(-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (-1, 1)$.
5. $(-\infty, -2) \bigcup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$.
6. $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$.
7. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \bigcup [1, +\infty) = \mathbb{R} - \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$.
8. $\left[-3, \frac{2}{3}\right]$.
9. $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right] \bigcup \varnothing = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right]$.
10. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.
11. $\left[-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right]$.
12. $\varnothing$.
13. $[2, 3)$.
14. $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$.
15. $(-\infty, -3] \bigcup \left(\frac{5}{3}, 3\right]$.
16. $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{41}+3}{2}\right] \bigcup \left[\frac{\sqrt{41}-3}{2}, +\infty\right)$.
17. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.