CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.7.7 Desigualdades tipo $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geq k$

Podemos suprimir el denominador $cx + d \neq 0$ pasándolo al segundo miembro, en cuyo caso tendríamos que resolver desigualdades ya conocidas o pasar k al primer miembro y efectuar la operación indicada:

$$\frac{ax+b}{cx+d} - k > 0,$$

con la cual obtendríamos una desigualdad equivalente de un tipo ya conocido.

Ejemplo 1.7.1 *Resolver la desigualdad* $\dfrac{2x+3}{4x-5} \leq 6$.

▼ Resolveremos esta desigualdad expresándola como una desigualdad de un tipo ya conocido.

$$\frac{2x+3}{4x-5} \leq 6 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{4x-5} - 6 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3-6(4x-5)}{4x-5} \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x+3-24x+30}{4x-5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-22x+33}{4x-5} \leq 0.$$

Considerando que $4x - 5 \neq 0$, puede suceder entonces que $4x - 5 < 0$ o bien que $4x - 5 > 0$.

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

1. Si $4x - 5 < 0$, entonces necesariamente $-22x + 33 \ge 0$:

$$\begin{aligned} 4x - 5 < 0 \;\&\; -22x + 33 \ge 0 &\Leftrightarrow 4x < 5 \;\&\; -22x \ge -33 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x < \frac{5}{4} \;\&\; x \le \frac{-33}{-22} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x < \frac{5}{4} \;\&\; x \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < \frac{5}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in CS_1 = \left(-\infty, \frac{5}{4}\right). \end{aligned}$$

2. Si $4x - 5 > 0$, entonces necesariamente $-22x + 33 \le 0$:

$$\begin{aligned} 4x - 5 > 0 \;\&\; -22x + 33 \le 0 &\Leftrightarrow 4x > 5 \;\&\; -22x \le -33 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x > \frac{5}{4} \;\&\; x \ge \frac{-33}{-22} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x > \frac{5}{4} \;\&\; x \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in CS_2 = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad original es

$$CS = CS_1 \bigcup CS_2 = \left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \bigcup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right).$$

Observación. Esta desigualdad también se puede resolver aplicando el procedimiento que se utiliza al resolver una ecuación, es decir, trasladar el denominador $(4x - 5)$ del primer miembro al segundo pero como factor, con lo cual obtenemos una desigualdad ya conocida.
¿Puede intentarlo? Sería un buen ejercicio.

□

Ejemplo 1.7.2 *Resolver la desigualdad* $\dfrac{2x + 3}{4x - 5} \ge -6$.

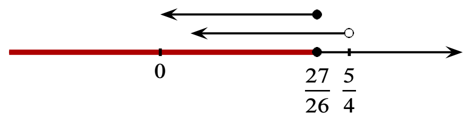
▼ Resolveremos esta desigualdad aplicando la observación hecha al final del ejemplo 1.7.1. Esto es, trasladando el denominador $(4x - 5)$ del primer miembro al segundo como factor.
Para lograr lo anterior, es necesario multiplicar por el denominador $(4x - 5)$ ambos miembros de la desigualdad; considerando, por supuesto, que $4x - 5 \neq 0$.
Ya que $4x - 5 \neq 0$, puede suceder entonces que $4x - 5 < 0$ o bien que $4x - 5 > 0$.

1. Si $4x - 5 < 0$, entonces (la desigualdad se invierte):

$$\begin{aligned} \frac{2x + 3}{4x - 5} \ge -6 &\Leftrightarrow \frac{2x + 3}{4x - 5}(4x - 5) \le -6(4x - 5) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x + 3 \le -24x + 30 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x + 24x \le 30 - 3 \Leftrightarrow 26x \le 27 \Leftrightarrow x \le \frac{27}{26}. \end{aligned}$$

Pero $4x - 5 < 0 \Leftrightarrow 4x < 5 \Leftrightarrow x < \dfrac{5}{4}$.

Se debe cumplir entonces que $x < \dfrac{5}{4} \;\&\; x \le \dfrac{27}{26}$.



Desigualdades que se cumplen ambas cuando $x \le \dfrac{27}{26}$:

Se tiene en este caso que

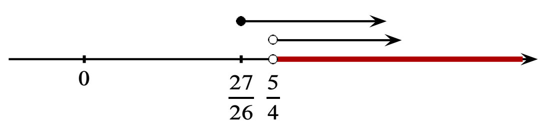
$$CS_1 = \left(-\infty, \frac{27}{26}\right] .$$

2. Si $4x - 5 > 0$, entonces (la desigualdad no cambia de sentido):

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{4x-5} \ge -6 \;\Leftrightarrow\; & \frac{2x+3}{4x-5}(4x-5) \ge -6(4x-5) \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; & 2x + 3 \ge -24x + 30 \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; & 2x + 24x \ge 30 - 3 \;\Leftrightarrow\; 26x \ge 27 \;\Leftrightarrow\; x \ge \frac{27}{26}.\end{aligned}$$

Pero $4x - 5 > 0 \;\Leftrightarrow\; 4x > 5 \;\Leftrightarrow\; x > \dfrac{5}{4}$.

Se debe cumplir que $x > \dfrac{5}{4}$ & $x \ge \dfrac{27}{26}$.



Desigualdades que se cumplen ambas cuando $x > \dfrac{5}{4}$.

Se tiene en este caso que

$$CS_2 = \left(\frac{5}{4}, +\infty\right) .$$

El conjunto solución CS de la desigualdad original $\dfrac{2x+3}{4x-5} \ge -6$ es la unión de CS_1 y CS_2:

$$CS = CS_1 \bigcup CS_2 = \left(-\infty, \frac{27}{26}\right] \bigcup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(\frac{27}{26}, \frac{5}{4}\right] .$$

Un buen ejercicio sería resolver esta misma desigualdad aplicando el procedimiento utilizado en el ejemplo 1.7.1. ¿Puede hacerlo?

□

Ejercicios 1.7.7 *Soluciones en la página 5*

Resolver las siguientes desigualdades:

1. $\dfrac{5+3x}{4x+5} > 1.$
2. $\dfrac{2}{3-5x} \leq -\dfrac{3}{5}.$
3. $\dfrac{6x-5}{x-2} < 7.$
4. $\dfrac{-2}{x-4} < 7\,.$
5. $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{1}{4}.$
6. $\dfrac{2x+3}{x+8} < 5.$
7. $\dfrac{3-x}{4x+1} \geq 4.$
8. $\dfrac{2x-9}{x-1} \geq 8.$
9. $\dfrac{2+3x}{3-4x} \leq 2.$
10. $\dfrac{2}{x} - 5 < \dfrac{3}{x} + 2.$

Ejercicios 1.7.7 *Desigualdades del tipo:* $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geq k$*, página 3*

1. $\left(-\dfrac{5}{4}, 0\right)$.
2. $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{19}{15}\right]$.
3. $(-\infty, 2) \bigcup (9, +\infty) = \mathbb{R} - [2, 9]$.
4. $\left(-\infty, \dfrac{26}{7}\right) \bigcup (4, +\infty) = \mathbb{R} - \left[\dfrac{26}{7}, 4\right]$.
5. $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \bigcup (1, +\infty) = \mathbb{R} - \left[-\dfrac{1}{3}, 1\right]$.
6. $\left(-\infty, -\dfrac{37}{3}\right) \bigcup (-8, +\infty) = \mathbb{R} - \left[-\dfrac{37}{3}, -8\right]$.
7. $\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{17}\right]$.
8. $\left[-\dfrac{1}{6}, 1\right)$.
9. $\left(-\infty, \dfrac{4}{11}\right] \bigcup \left(\dfrac{3}{4}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(\dfrac{4}{11}, \dfrac{3}{4}\right]$.
10. $\left(-\infty, -\dfrac{1}{7}\right) \bigcup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \left[-\dfrac{1}{7}, 0\right]$.