CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.7.6 Desigualdades tipo $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geq 0$

Desde luego $cx+d \neq 0$, pues en caso contrario la desigualdad no tendría sentido. Puede suceder entonces que

1. $cx+d > 0$, o bien que
2. $cx+d < 0$.

Para resolver la desigualdad propuesta, en ambos casos suprimimos denominadores, es decir, pasamos el divisor $(cx+d)$ al otro miembro:

1. $ax+b \geq 0\cdot(cx+d) \;\Leftrightarrow\; ax+b \geq 0$, cuando $cx+d > 0$.
2. $ax+b \leq 0\cdot(cx+d) \;\Leftrightarrow\; ax+b \leq 0$, cuando $cx+d < 0$.

Hallaremos así el conjunto solución de cada una de las desigualdades; intersecaremos cada uno de ellos con el conjunto solución de $cx+d > 0$ en el caso 1, y con el de $cx+d < 0$ en el caso 2. La unión de las dos intersecciones así obtenidas será el conjunto solución de la desigualdad propuesta.

Desde luego que puede parecer más sencillo considerar la solución de la desigualdad

$$\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$$

de la siguiente manera:

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

1. Si $cx + d > 0$, necesariamente $ax + b \geq 0$; luego resolvemos
$$ax + b \geq 0 \ \& \ cx + d > 0$$
e intersecamos ambos conjuntos solución, lo cual será parte del conjunto solución de la desigualdad propuesta.

2. Si $cx + d < 0$ ahora $ax + b \leq 0$, por lo cual resolvemos
$$ax + b \leq 0 \ \& \ cx + d < 0$$
e intersecamos ambos conjuntos solución.

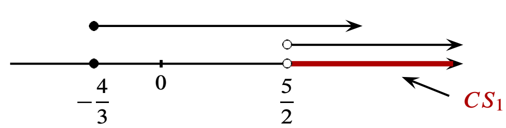
La unión de ambas intersecciones es el conjunto solución buscado.

Ejemplo 1.7.1 *Resolver la desigualdad* $\dfrac{3x+4}{2x-5} \geq 0$.

▼ Por supuesto que $2x - 5 \neq 0$.
Puede suceder entonces que $2x - 5 > 0$ o bien que $2x - 5 < 0$.

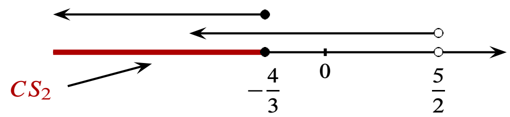
1. Si $2x - 5 > 0$, entonces $\left(\text{para que } \dfrac{3x+4}{2x-5} \geq 0\right)$ necesariamente debe suceder que $3x + 4 \geq 0$.

   De esta forma:
$$\begin{aligned}
2x - 5 > 0 \ \& \ 3x + 4 \geq 0 &\Leftrightarrow 2x > 5 \ \& \ 3x \geq -4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \ \& \ x \geq -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \ \& \ x \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right) \cap \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow CS_1 = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right).
\end{aligned}$$



2. Si $2x - 5 < 0$, entonces $\left(\text{para que } \dfrac{3x+4}{2x-5} \geq 0\right)$ necesariamente debe suceder que $3x + 4 \leq 0$.

   Y ahora,
$$\begin{aligned}
2x - 5 < 0 \ \& \ 3x + 4 \leq 0 &\Leftrightarrow 2x < 5 \ \& \ 3x \leq -4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x < \frac{5}{2} \ \& \ x \leq -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \ \& \ x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cap \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] = \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow CS_2 = \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right].
\end{aligned}$$



Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad $\dfrac{3x+4}{2x-5} \geq 0$ es

$$CS = CS_1 \bigcup CS_2 = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \bigcup \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] =$$
$$= \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \bigcup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right].$$

□

Ejemplo 1.7.2 *Resolver la desigualdad* $\dfrac{5x-4}{3x+2} < 0$.

▼ Consideramos que $3x + 2 \neq 0$.
Puede ser entonces que $3x + 2 < 0$ o bien que $3x + 2 > 0$.

1. Si $3x + 2 < 0$, entonces $\left(\text{para que } \dfrac{5x-4}{3x+2} < 0\right)$ necesariamente debe suceder que $5x - 4 > 0$. Vemos así

$$\begin{aligned} 3x + 2 < 0 \;\&\; 5x - 4 > 0 &\Leftrightarrow 3x < -2 \;\&\; 5x > 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{2}{3} \;\&\; x > \frac{4}{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \;\&\; x \in \left(\frac{4}{5}, +\infty\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cap \left(\frac{4}{5}, +\infty\right) = \varnothing \Rightarrow \\ &\Rightarrow CS_1 = \varnothing. \end{aligned}$$

2. Si $3x + 2 > 0$, entonces $\left(\text{para que } \dfrac{5x-4}{3x+2} < 0\right)$ necesariamente debe suceder que $5x - 4 < 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} 3x + 2 > 0 \;\&\; 5x - 4 < 0 &\Leftrightarrow 3x > -2 \;\&\; 5x < 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{2}{3} \;\&\; x < \frac{4}{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right) \;\&\; x \in \left(-\infty, \frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow CS_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de $\dfrac{5x-4}{3x+2} < 0$ es

$$CS = CS_1 \bigcup CS_2 = \varnothing \bigcup \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right).$$

□

Ejemplo 1.7.3 *Resolver la desigualdad* $\dfrac{-1}{4x+3} > 0$.

▼ Notamos que el numerador (-1) de la fracción $\dfrac{-1}{4x+3}$ siempre es negativo $(-1 < 0)$.
Entonces:

$$\frac{-1}{4x+3} > 0 \;\Leftrightarrow\; 4x+3 < 0 \;\Leftrightarrow\; 4x < -3 \;\Leftrightarrow\; x < -\frac{3}{4}.$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad es

$$CS = \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right).$$

□