CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.7.3 Desigualdades tipo $a_1x + b_1 \geq a_2x + b_2 \geq a_3x + b_3$

Esto quiere decir hallar los números reales x que cumplen simultáneamente las dos desigualdades:

$$a_1x + b_1 \geq a_2x + b_2 \quad \& \quad a_2x + b_2 \geq a_3x + b_3.$$

Para esto se halla el conjunto solución de cada una de las desigualdades (que son del tipo $ax + b \geq cx + d$), se intersecan los dos conjuntos solución obtenidos y esta intersección es el conjunto solución del sistema propuesto.
Geométricamente resolver el sistema de desigualdades

$$a_1x + b_1 \geq a_2x + b_2 \geq a_3x + b_3,$$

quiere decir hallar las x tales que la recta $y = a_2x + b_2$ se encuentra entre las rectas $y = a_1x + b_1$ & $y = a_3x + b_3$.

Ejemplo 1.7.1 *Resolver la desigualdad* $3x + 4 \leq x - 5 < \dfrac{2}{3}x + 1$.

▼ Esta desigualdad doble se cumple si y sólo si

$$3x + 4 \leq x - 5 \quad \& \quad x - 5 < \frac{2}{3}x + 1.$$

Resolvemos la primera desigualdad:

$$3x + 4 \leq x - 5 \Leftrightarrow 2x \leq -9 \Leftrightarrow x \leq -\frac{9}{2} \Leftrightarrow CS_1 = \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right].$$

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

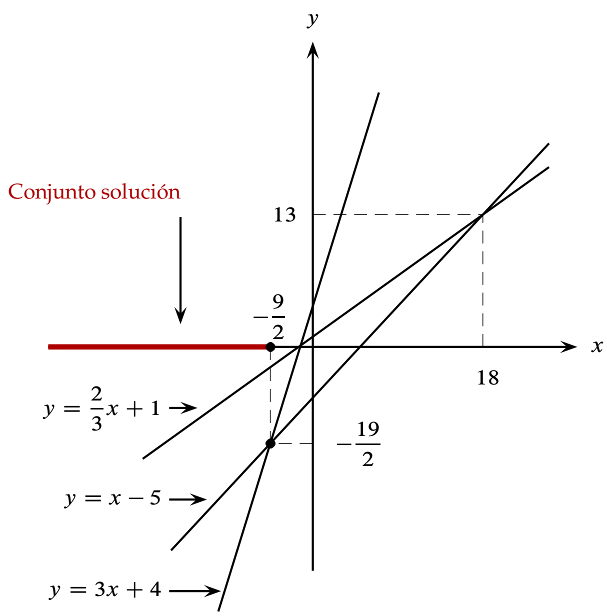
Resolvemos la segunda desigualdad:

$$x - 5 < \frac{2}{3}x + 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3}x < 6 \;\Leftrightarrow\; x < 18 \;\Leftrightarrow\; CS_2 = (-\infty, 18)\,.$$

El conjunto solución CS de la desigualdad doble es

$$CS = CS_1 \bigcap CS_2 = \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right] \bigcap (-\infty, 18) = \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right].$$

Geométricamente:



También podemos resolver la desigualdad doble hallando las intersecciones de las rectas

$$y = 3x + 4, \quad y = x - 5 \;\&\; y = \frac{2}{3}x + 1.$$

y visualizando sus posiciones relativas en el plano cartesiano.

□

Ejemplo 1.7.2 *Resolver la desigualdad* $18 - 5x > 2x + 3 \geq 4 - 3x$.

▼ Esta doble desigualdad se cumple si y sólo si

$$18 - 5x > 2x + 3 \;\;\&\;\; 2x + 3 \geq 4 - 3x.$$

Resolvemos la primera desigualdad:

$$18 - 5x > 2x + 3 \;\Leftrightarrow\; -7x > -15 \;\Leftrightarrow\; x < \frac{15}{7} \;\Leftrightarrow\; CS_1 = \left(-\infty, \frac{15}{7}\right).$$

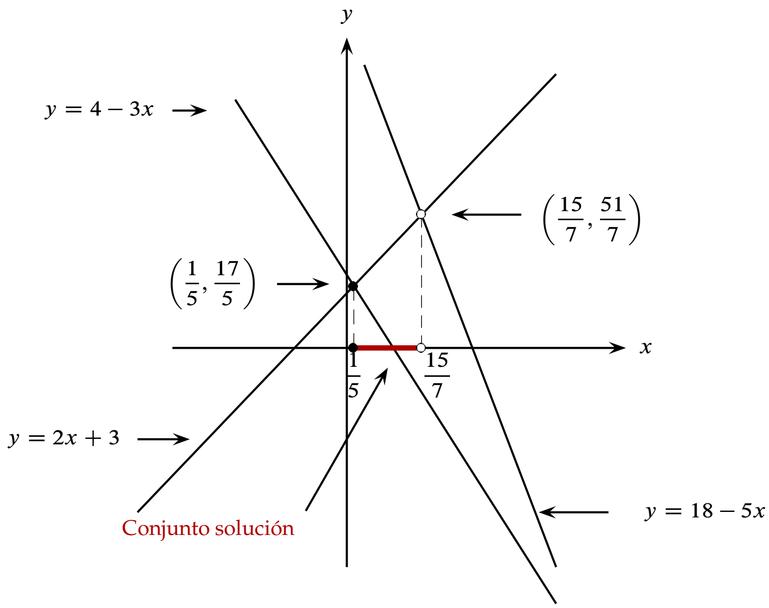
Resolvemos la segunda desigualdad:

$$2x + 3 \geq 4 - 3x \;\Leftrightarrow\; 5x \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{1}{5} \;\Leftrightarrow\; CS_2 = \left[\frac{1}{5}, +\infty\right).$$

El conjunto solución CS de la doble desigualdad es

$$CS = CS_1 \bigcap CS_2 = \left(-\infty, \frac{15}{7}\right) \bigcap \left[\frac{1}{5}, +\infty\right) = \left[\frac{1}{5}, \frac{15}{7}\right).$$

Geométricamente:



$\square$

Ejemplo 1.7.3 *Resolver la desigualdad* $\dfrac{2}{3}x - 5 < 4 + \dfrac{2}{3}x < 2 - \dfrac{3}{4}x$.

▼ Esta doble desigualdad se cumple cuando

$$\frac{2}{3}x - 5 < 4 + \frac{2}{3}x \;\;\&\;\; 4 + \frac{2}{3}x < 2 - \frac{3}{4}x.$$

Resolvemos la primera desigualdad:

$$\frac{2}{3}x - 5 < 4 + \frac{2}{3}x \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x < 4 + 5 \;\Leftrightarrow\; 0 < 9.$$

Desigualdad que siempre se cumple (para cualquier valor de x siempre se llegará a $0 < 9$), entonces:

$$CS_1 = \mathbb{R}.$$

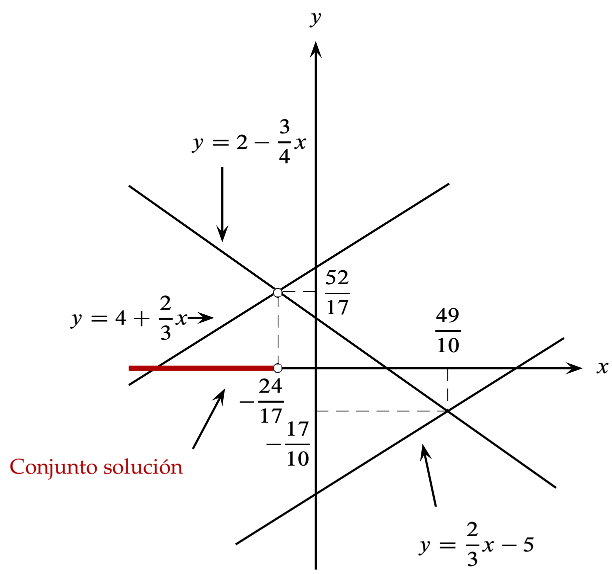
Resolvemos la segunda desigualdad:

$$4 + \frac{2}{3}x < 2 - \frac{3}{4}x \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x < 2 - 4 \;\Leftrightarrow\; \frac{17}{12}x < -2 \;\Leftrightarrow\; x < -\frac{24}{17} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; CS_2 = \left(-\infty, -\frac{24}{17}\right).$$

El conjunto solución CS de la doble desigualdad es

$$CS = CS_1 \bigcap CS_2 = \mathbb{R} \bigcap \left(-\infty, -\frac{24}{17}\right) = \left(-\infty, -\frac{24}{17}\right).$$

Geométricamente tenemos:



□

Ejemplo 1.7.4 *Resolver la desigualdad* $6 - \frac{5}{3}x > 8 - \frac{5}{3}x \geq 7 + \frac{9}{2}x$.

▼ Esta doble desigualdad se cumple cuando

$$6 - \frac{5}{3}x > 8 - \frac{5}{3}x \ \ \& \ \ 8 - \frac{5}{3}x \geq 7 + \frac{9}{2}x.$$

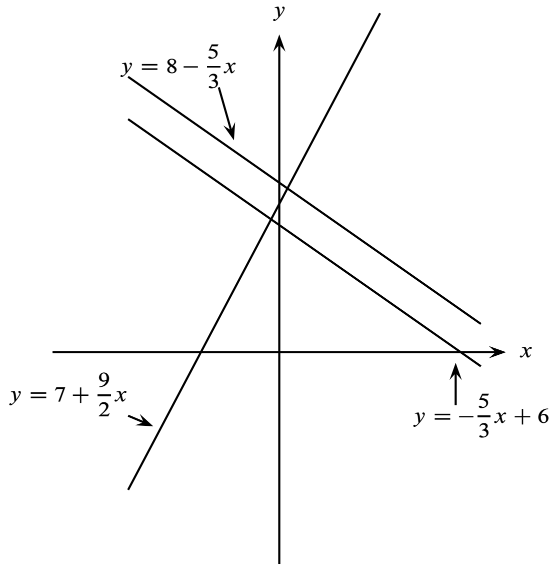
Resolvemos la primera desigualdad:

$$6 - \frac{5}{3}x > 8 - \frac{5}{3}x \ \Leftrightarrow \ -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}x > 8 - 6 \ \Leftrightarrow \ 0 > 2.$$

Desigualdad que nunca se cumple, entonces:

$$CS_1 = \varnothing.$$

Es innecesario calcular CS_2, pues como $CS_1 = \varnothing$ entonces, cualquiera que sea CS_2 resulta que $CS_2 \bigcap \varnothing = \varnothing$. Geométricamente:



□

Ejercicios 1.7.3 *Soluciones en la página 6*

Resolver las siguientes desigualdades:

1. $1 < 3x + 4 \leq 16$.
2. $-1 < 3x + 4 < 1$.
3. $1 < 3x + 4 < -1$.
4. $\dfrac{7}{2} > \dfrac{1-4x}{5} > \dfrac{3}{2}$.
5. $-5 \leq \dfrac{4-3x}{2} < 1$.
6. $6x + 5 \geq 4x + 1 > x - 2$.
7. $3 - 2x < 3x + 4 < 4 - x$.
8. $\dfrac{2}{3}x + 5 \leq 8 - \dfrac{3}{4}x \leq 7 + \dfrac{4}{5}x$.
9. $1 - 5x \leq 8 + 3x < 3x + 9$.
10. $-3x + 4 > 6 - 3x \geq 9x + 5$.
11. $3x - 4 < 9x + 2 < x - 10$.

Ejercicios 1.7.3 *Desigualdades del tipo: $a_1x + b_1 \geq a_2x + b_2 \geq a_3x + b_3$, página 5*

1. $(-1, 4]$.
2. $\left(-\frac{5}{3}, -1\right)$.
3. $\varnothing$.
4. $\left(-\frac{33}{8}, -\frac{13}{8}\right)$.
5. $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right]$.
6. $(-1, +\infty)$.
7. $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$.
8. $\left[\frac{20}{31}, \frac{36}{17}\right]$.
9. $\left[-\frac{7}{8}, +\infty\right)$.
10. $\varnothing$.
11. $\varnothing$.