CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.7.2 Desigualdades tipo $ax + b \geq cx + d$

Resolver una desigualdad como ésa significa, en útima instancia, hallar otra desigualdad equivalente, esto es, que tenga el mismo conjunto solución, pero donde x aparezca sola en uno de los miembros. Significa pues despejar la x. Resolver la desigualdad recuerda mucho resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.
Podemos trasponer términos y escribir en un mismo miembro todos los términos que tienen x, y en el otro los que no:

$$ax - cx \geq d - b.$$

Ahora reducir términos semejantes, es decir, poner x como factor común:

$$(a - c)x \geq d - b.$$

Ahora si $a - c \neq 0$ (si $a \neq c$), llegamos a $a_1x + b_1 \geq 0$, por lo que:

1. Si $a - c > 0$, entonces $x \geq \dfrac{d - b}{a - c}$.

   Y el conjunto solución será:

   $$CS = \left[\frac{d - b}{a - c}, +\infty\right) .$$

2. Si $a - c < 0$, entonces $x \leq \dfrac{d - b}{a - c}$. En este caso el conjunto solución es

   $$CS = \left(-\infty, \frac{d - b}{a - c}\right] .$$

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Si $a - c = 0$, la desigualdad equivalente a la propuesta es:

$$0 \cdot x \geq d - b \;\Rightarrow\; 0 \geq d - b.$$

La cual se cumple si efectivamente $0 \geq d - b$, en cuyo caso el conjunto solución es

$$CS = \mathbb{R}\,.$$

O bien nunca se cumple si $d - b > 0$, y en este caso el conjunto solución es $\emptyset$, el conjunto vacío; es decir,

$$CS = \emptyset\,.$$

Geométricamente resolver la desigualdad $ax + b \geq cx + d$ quiere decir hallar las x tales que la recta $y = ax + b$ corta a la recta $y = cx + d$ o bien está por encima de ella.

Ejemplo 1.7.1 *Resolver la desigualdad* $4x - 5 \geq 2x + 9$.

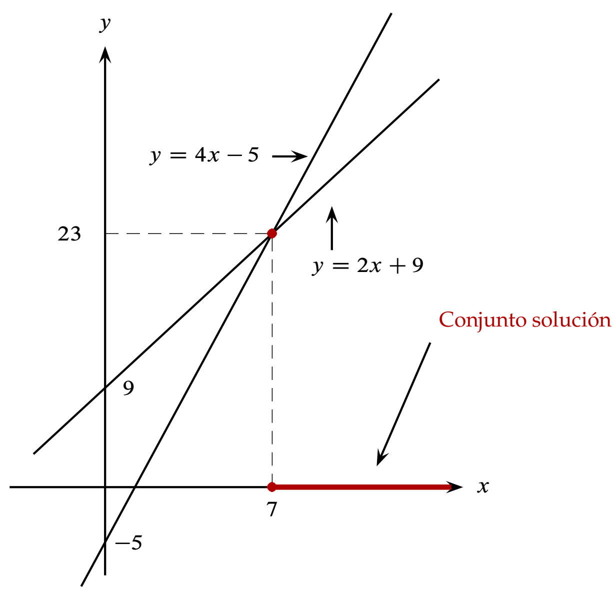
▼

$$4x - 5 \geq 2x + 9 \;\Leftrightarrow\; 4x - 2x \geq 9 + 5 \;\Leftrightarrow\; 2x \geq 14 \;\Leftrightarrow\; x \geq 7.$$

Esta última desigualdad se satisface cuando $x \in [7, +\infty)$.
Luego el conjunto solución de la desigualdad original es

$$CS = [7, +\infty)\;.$$

Geométricamente se tiene:



Podemos también resolver la desigualdad hallando la intersección de las rectas $y = 4x - 5$ & $y = 2x + 9$ y visualizando cuál de las dos está por encima de la otra.

□

Ejemplo 1.7.2 *Resolver la desigualdad* $\dfrac{5}{4}x - \dfrac{2}{3} > \dfrac{8}{3}x - \dfrac{3}{2}$.

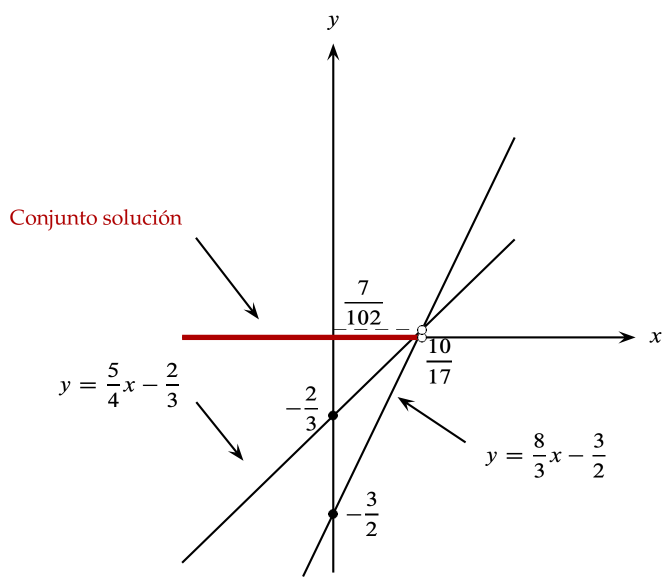
▼

$$\frac{5}{4}x - \frac{2}{3} > \frac{8}{3}x - \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{4}x - \frac{8}{3}x > \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; -\frac{17}{12}x > -\frac{5}{6} \;\Leftrightarrow\; x < \frac{10}{17}.$$

Esta última desigualdad se cumple cuando $x \in \left(-\infty, \frac{10}{17}\right)$, por lo cual el conjunto solución de la desigualdad original es

$$CS = \left(-\infty, \frac{10}{17}\right).$$

Geométricamente se tiene:



□

Ejemplo 1.7.3 *Resolver la desigualdad* $1 - 8x < 5 - 8x$.

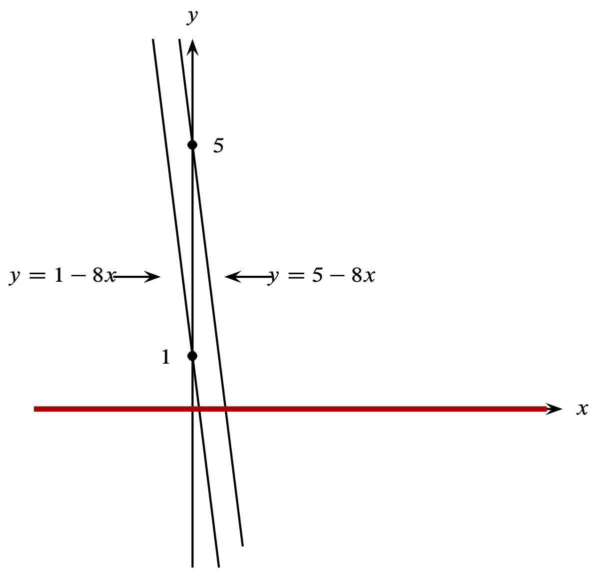
▼

$$1 - 8x < 5 - 8x \;\Leftrightarrow\; -8x + 8x < 5 - 1 \;\Leftrightarrow\; 0 < 4.$$

Esta última desigualdad siempre se cumple, luego la desigualdad original siempre se cumple.
Por lo tanto el conjunto solución es

$$CS = \mathbb{R}.$$

Geométricamente:



Para cualquier valor de x el valor de $y = 5 - 8x$ es siempre mayor que el valor de $y = 1 - 8x$.

□

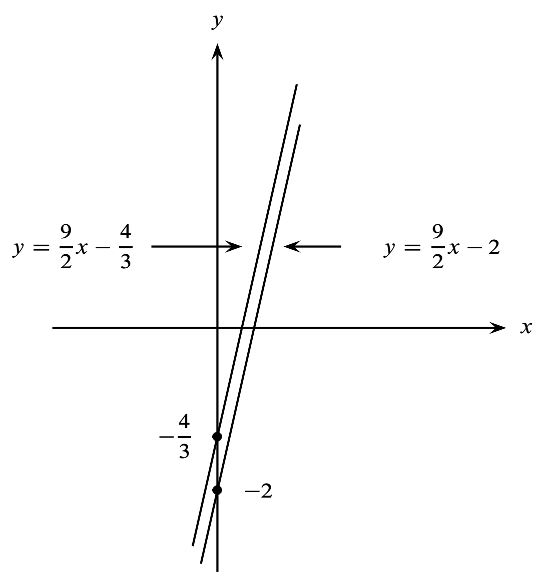
Ejemplo 1.7.4 *Resolver la desigualdad* $\frac{9}{2}x - \frac{4}{3} \leq \frac{9}{2}x - 2$.

▼

$$\frac{9}{2}x - \frac{4}{3} \leq \frac{9}{2}x - 2 \Leftrightarrow \frac{9}{2}x - \frac{9}{2}x \leq -2 + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{2}{3}.$$

$$CS = \emptyset, \text{ es el conjunto vacío.}$$

Geométricamente:



Para ningún valor de x el valor de $y = \frac{9}{2}x - \frac{4}{3}$ es menor que el valor de $y = \frac{9}{2}x - 2$.

□

Ejercicios 1.7.2 *Soluciones en la página 6*

Resolver las siguientes desigualdades:

1. $1 - 2x > \dfrac{x}{2} - 3.$
2. $-5x - 4 \geq 3 - 6x.$
3. $\dfrac{-3}{4}x + \dfrac{5}{3} < \dfrac{2}{9}x - 1.$
4. $3 - 5x \leq 6 - 5x.$
5. $\dfrac{3}{2}x - 5 > 1 + \dfrac{3}{2}x.$
6. $2(x + 3) > 3(x - 1) + 6.$

Ejercicios 1.7.2 *Desigualdades del tipo: $ax+b \geq cx+d$, página 4*

1. $\left(-\infty, \frac{8}{5}\right)$.
2. $[7, +\infty)$.
3. $\left(\frac{96}{35}, +\infty\right)$.
4. $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
5. $\emptyset$, el conjunto vacío .
6. $(-\infty, 3)$.