CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.3 Propiedades algebraicas de los números reales

1.3.1 Propiedades básicas

En los números reales se definen dos operaciones, adición y multiplicación, las cuales tienen ciertas propiedades:

Propiedades	*Adición*	*Multiplicación*
Conmutatividad	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociatividad	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Existencia del elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Existencia del elemento inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot a^{-1} = 1$ si $a \neq 0$
Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$		

[1]canek.azc.uam.mx: 14/ 5/ 2008

Al producto de dos números reales a, b lo denotaremos indistintamente poniendo punto entre ellos: $a \cdot b$, o $\times$: $a \times b$ o simplemente yuxtaponiéndolos: $a\,b$.

- Conmutativa.

  Ejemplos:

  1. $8 + 2 = 2 + 8$.
  2. $a + 3 = 3 + a$.
  3. $x^2 - 1 = -1 + x^2$.
  4. $3 \times 6 = 6 \times 3$.
  5. $a \times 5 = 5 \times a$.

- Asociativa.

  Ejemplos:

  1. $(5 + 2) + 6 = 5 + (2 + 6)$.
  2. $(a + 7) + g = a + (7 + g)$.
  3. $(y^2 + c) + 2 = y^2 + (c + 2)$.
  4. $(3 \times 6) \times z = 3 \times (6 \times z)$.
  5. $(5 \times x^2) \times 9 = 5 \times (x^2 \times 9)$.
  6. $y \times f) \times h^2 = y \times (f \times h^2)$.

- Existencia del elemento neutro.

  Ejemplos:

  1. $5 + 0 = 5$.
  2. $(a + c) + 0 = a + c$.
  3. $(ya) + 0 = ya$.
  4. $8 \times 1 = 8$.
  5. $(g + h) \times 1 = g + h$.
  6. $(g \times h) \times 1 = g \times h$.

- Existencia del elemento inverso.

  Ejemplos:

  1. $7 + (-7) = 0$.
  2. $c + (-c) = 0$.
  3. $3b + (-3b) = 0$.
  4. $4 \times 4^{-1} = 1$.
  5. $15 \times 15^{-1} = 1$.
  6. $h \times h^{-1} = 1$ si $h \neq 0$.

- Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

  Ejemplos:

  1. $7 \times (a + h) = (7 \times a) + (7 \times h)$ o bien $7(a + h) = 7a + 7h$.
  2. $b \times (5 + c) = (b \times 5) + (b \times c)$ o bien $b(5 + c) = 5b + bc$.
  3. $f \times h \times (g + b) = [(f \times h) \times g] + [(f \times h) \times b]$ o bien $(fh)(g + b) = (fh)g + (fh)b$.

- Expresiones tales como:

  $\{[(a+b)+c]+d\}+e+\ \cdots$ o bien $\{[(a\cdot b)\cdot c]\cdot d\}\cdot e\ \cdot ...$

  se escriben simplemente así:

  $a+b+c+d+e+\ \cdots$ o bien $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\ \cdot ...$

  pues son equivalentes y no se prestan a confusión.

  Ejemplos:

  1. $\{[(3+a)+g]+7b\}+5-d = 3+a+g+7b+5-d.$
  2. $\{[(7\cdot a)\cdot c]\cdot d\}\cdot 2\cdot a\cdot c = 7\cdot a\cdot c\cdot d\cdot 2\cdot a\cdot c.$

1.3.2 Consecuencias

Sean $a, b, c, d,\ \cdots$ números reales:

- $a+b=a+c \ \Rightarrow\ b=c.$

  Esta expresión se lee: si $a+b=a+c$, entonces $b=c$. Es decir, se puede cancelar un mismo término de los dos miembros de una igualdad.

- $a\cdot 0 = 0.$

- $a\cdot b = a\cdot c \ \& \ a\neq 0 \ \Rightarrow\ b=c.$

  Nótese que no podemos cancelar el 0 como factor, pues entonces tendríamos aberraciones del tipo siguiente:

  $$0\cdot 1 = 0 \ \& \ 0\cdot 2 = 0 \ \Rightarrow\ 0\cdot 1 = 0\cdot 2 \ \Rightarrow\ 1=2.$$

- $a\cdot b = 0 \ \Rightarrow\ a=0$ o bien $b=0$.

  Esta propiedad se usa para resolver ecuaciones: si logramos factorizar un polinomio de grado n,

  $$P(x) = Q(x)R(x)$$

  entonces, resolver la ecuación $P(x)=0$ es lo mismo que resolver las dos ecuaciones $Q(x)=0$ y $R(x)=0$ que no son de grado mayor que n.

  Ejemplo:

  Se tiene que $x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$;

  $(x-5)(x+2)=0 \ \Rightarrow\ x-5=0$ o bien $x+2=0 \ \Rightarrow\ x=5$ o bien $x=-2$.

Se definen la sustracción y la división como:

- $a-b \stackrel{\text{def}}{=} a+(-b).$

- $\dfrac{a}{b} \overset{\text{def}}{=} a \cdot b^{-1}$ con $b \neq 0$.

Algunas igualdades importantes son:

- $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$ si $a \neq 0$.

  Ejemplos:

  1. $\dfrac{1}{3} = 3^{-1}$.
  2. $\dfrac{1}{ab} = (ab)^{-1}$ si $ab \neq 0$.

- $a - b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b$ (esta expresión se lee: $a - b = 0$ si y solamente si $a = b$).

  Ejemplos:

  1. $a - 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 5$.
  2. $a + b - z = 0 \;\Leftrightarrow\; a + b = z$.

- $\dfrac{a}{b} = 1 \;\Leftrightarrow\; a = b$ con $b \neq 0$.

  Ejemplos:

  1. $\dfrac{2}{c} = 1 \;\Leftrightarrow\; c = 2$.
  2. $\dfrac{z}{6} = 1 \;\Leftrightarrow\; z = 6$.
  3. $\dfrac{ac}{h} = 1 \;\Leftrightarrow\; ac = h$ con $h \neq 0$.

- $-0 = 0$.
- $1^{-1} = 1$.
- $-(-a) = a$.

  Ejemplos:

  1. $-(-10) = 10$.
  2. $-[-(h \times g)] = h \times g$.
  3. $-[-(a + b)] = a + b$.

- $(a^{-1})^{-1} = a$ con $a \neq 0$.

  Ejemplos:

  1. $(3^{-1})^{-1} = 3$.
  2. $[(a \times b)^{-1}]^{-1} = a \times b$.
  3. $[(8 + a)^{-1}]^{-1} = 8 + a$.

- $-(a+b) = -a - b$.

  Ejemplos:

  1. $-(2+4) = -2-4$.
  2. $-(5+c) = -5-c$.

- $(a \times b)^{-1} = a^{-1} \times b^{-1}$.

  Ejemplos:

  1. $(3 \times g)^{-1} = 3^{-1} \times g^{-1}$.
  2. $[(b+c) \times f]^{-1} = (b+c)^{-1} \times f^{-1}$.

- $a(-b) = (-a)b = -(ab)$ "más por menos es menos", "menos por más es menos".

  Ejemplos:

  1. $(-c) \times h = -(c \times h) = c \times (-h)$.
  2. $(-3) \times g = -(3 \times g) = 3 \times (-g)$.
  3. $(-1) \times (5+c) = -[1 \times (5+c)] = 1 \times [-(5+c)] = -(5+c)$.

- $(a-b) \times c = (a \times c) - (b \times c)$ propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la sustracción.

  Ejemplos:

  1. $(3-z) \times g = (3 \times g) - (z \times g)$.
  2. $[(f \times h) - y] \times 2 = [(f \times h) \times 2] - (y \times 2)$.

- $(-a)(-b) = a \cdot b$ "menos por menos es más".

  Ejemplos:

  1. $(-5)(-3) = (5)(3) = 15$.
  2. $(-z)(-6) = (z)(6)$.

- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$ donde $b \times d \neq 0$.

  Ejemplos:

  1. $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{5} \Leftrightarrow 5a = 2b$.
  2. $\dfrac{7}{c} = \dfrac{h}{f} \Leftrightarrow 7f = ch$ donde $cf \neq 0$.

- $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{(a \times d) \pm (b \times c)}{b \times d}$ donde $b \times d \neq 0$.

Ejemplos:

1. $\dfrac{7}{4}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{(7)(3)-(4)(2)}{(4)(3)}=\dfrac{21-8}{12}=\dfrac{13}{12}$.
2. $\dfrac{2}{a}+\dfrac{c}{5}=\dfrac{(2\times 5)+(a\times c)}{a\times 5}=\dfrac{10+(a\times c)}{5\times a}$ donde $a\neq 0$.

- $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\times c}{b\times d}$ donde $b\times d\neq 0$.

Ejemplos:

1. $\dfrac{3}{z}\times\dfrac{4}{f}=\dfrac{3\times 4}{z\times f}=\dfrac{12}{f\times z}$ donde $z\times f\neq 0$.
2. $\dfrac{8\times a}{5}\times\dfrac{h}{b}=\dfrac{8\times a\times h}{5\times b}$ donde $b\neq 0$.

- $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a\times d}{b\times c}$ donde $b\times d\times c\neq 0$.

Ejemplos:

1. $\dfrac{\frac{3a}{5}}{\frac{c}{7}}=\dfrac{(3a)7}{5c}=\dfrac{21a}{5c}$ donde $c\neq 0$.
2. $\dfrac{\frac{2}{f}}{\frac{g}{h}}=\dfrac{2\times h}{f\times g}$ donde $f\times g\times h\neq 0$.

- $\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}$ donde $b\neq 0$ “más entre menos es menos", “menos entre más es menos".

Ejemplos:

1. $\dfrac{c}{-9}=-\dfrac{c}{9}=\dfrac{-c}{9}$.
2. $\dfrac{f\times z}{-d}=-\dfrac{f\times z}{d}=\dfrac{-(f\times z)}{d}$ donde $d\neq 0$.

- $\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$ donde $b\neq 0$ “menos entre menos es más".

Ejemplos:

1. $\dfrac{-2}{-7}=\dfrac{2}{7}$.
2. $\dfrac{-z}{-b}=\dfrac{z}{b}$ donde $b\neq 0$.
3. $\dfrac{-(ac)}{-(bd)}=\dfrac{ac}{bd}$ donde $bd\neq 0$.

- $\dfrac{a \times b}{a \times c} = \dfrac{b}{c}$ donde $a \times c \neq 0$, de numerador y denominador se puede cancelar el mismo factor siempre que éste sea diferente de cero.

  Ejemplos:

  1. $\dfrac{4 \times g}{4 \times h} = \dfrac{g}{h}$ donde $h \neq 0$.
  2. $\dfrac{a \times g \times f}{5 \times f} = \dfrac{a \times g}{5}$ donde $f \neq 0$.

- Si n es un número natural, se definen: $a^n = \begin{cases} a & \text{si } n = 1; \\ a^{n-1} \cdot a & \text{si } n > 1; \end{cases}$

  n es el exponente, a es la base y a^n es la enésima potencia de a.

  Ejemplos:

  1. $a^1 = a$.
  2. $2^1 = 2$.
  3. $a^2 = a^1 \times a = a \times a$.
  4. $6^2 = 6^1 \times 6 = 6 \times 6 = 36$.
  5. $a^3 = a^2 \times a$.
  6. $9^3 = 9^2 \times 9 = 729$.

- $a^0 = 1 \quad (\text{con } a \neq 0)$.

  Ejemplos:

  1. $^0 = 1$.
  2. $3^0 = 1$.
  3. $(a+b)^0 = 1$.
  4. $(3+a)^0 = 1$.
  5. $(c \times d)^0 = 1$.
  6. $(8 \times 2)^0 = 1$.

- $a^{-n} \overset{\text{def}}{=} (a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = \dfrac{1}{a^n} \quad (\text{con } a \neq 0)$.

  Ejemplos:

  1. $b^{-2} = (b^{-1})^2 = (b^2)^{-1} = \dfrac{1}{b^2}$.
  2. $7^{-3} = (7^{-1})^3 = (7^3)^{-1} = \dfrac{1}{7^3}$.

- $\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a$ (si n es par entonces $a \geq 0$).

  Ejemplos:

  1. $\sqrt[2]{a} = b \Rightarrow b^2 = a$.
  2. En la raíz cuadrada poner el índice ^{2} es opcional:
     $\sqrt{c} = 4 \Rightarrow 4^2 = 16 = c$.
  3. $\sqrt[3]{a+c} = d \Rightarrow d^3 = a + c$.

- Si n es impar $b^n = a \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a} = b$.

  Ejemplo:

  1. $d^3 = a + c \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{a + c} = d$.

- $a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$ si $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

  Ejemplos:

  1. $\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$.
  2. $\sqrt[2]{\pi^6} = \pi^{\frac{6}{2}} = \pi^3$.

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Propiedades de los exponentes. Si r & s son números racionales:

- $(a \times b)^r = a^r \times b^r$. Una potencia de un producto es el producto de las potencias de los factores:

  Ejemplos:

  1. $(3 \times a)^2 = 3^2 \times a^2 = 9 \times a^2$.
  2. $[(a + b) \times c]^2 = (a + b)^2 \times c^2$.
  3. $(3 \times 2)^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{2}{5}} \times 2^{\frac{2}{5}}$.

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes.

  Ejemplos:

  1. $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$.
  2. $b \times b = b^1 \times b^1 = b^{1+1} = b^2$.
  3. $(3 \times a)^2 \times (3 \times a) = (3 \times a)^2 \times (3 \times a)^1 = (3 \times a)^{2+1} = (3 \times a)^3$.

- $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ si $a \neq 0$. Para dividir potencias de la misma base se restan los exponentes.
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$. Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes.

  Ejemplos:

  1. $(a^2)^2 = a^{2\times 2} = a^4$.
  2. $(b^3)^4 = b^{3\times 4} = b^{12}$.
  3. $(7^1)^2 = 7^{1\times 2} = 7^2 = 49$.
  4. $[(a + b)^2]^3 = (a + b)^{2\times 3} = (a + b)^6$.

Estas propiedades también son ciertas en el caso de exponentes irracionales pero eso lo veremos posteriormente.

Ejercicios 1.3.1 *Soluciones en la página 12*

Simplificar las expresiones numéricas siguientes

1. $\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{2}{5}$.
2. $\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{4}{-15}\right)$.
3. $\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{8}{15}\right)^{-1}$.
4. $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\right)$.
5. $\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)^{-1}$.
6. $(16)^{\frac{4}{5}}(8)^{-\frac{2}{5}}$.

1.3.3 Factorización

Otras igualdades importantes se denominan productos notables que también se pueden ver como una factorización. Por factorizar una expresión algebraica se entiende escribirla como un producto. Algunos ejemplos de factorización son:

- $ax \pm bx = (a \pm b)x$. Sacar factor común, observen que en realidad es la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición o a la sustracción.

  Ejemplos:

  1. $ax + x = ax + 1 \cdot x = (a+1)x$.
  2. $xb^2 + 6b^2 = (x+6)b^2$.
  3. $5ac + 2acx = (5+2x)ac$.
  4. $6x^2y + 3y = (2x^2+1)3y$.

- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Diferencia de cuadrados.

  Ejemplos:

  1. $x^2 - z^2 = (x+z)(x-z)$.
  2. $4a^2 - 9b^2 = (2a)^2 - (3b)^2 = (2a+3b)(2a-3b)$.
  3. $c^2 - 1 = (c+1)(c-1)$.
  4. $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

- $x^2 + (a+b)x + (ab) = (x+a)(x+b)$. Factorizar un trinomio.

  Ejemplos:

  1. $x^2 + 9x + 14 = x^2 + (2+7)x + (2)(7) = (x+2)(x+7)$.
  2. $x^2 - 5x - 6 = x^2 + (1-6)x + (1)(-6) = (x+1)(x-6)$.
  3. $x^2 - 11x + 24 = x^2 + (-3-8)x + (-3)(-8) = (x-3)(x-8)$.

- $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$. Trinomio cuadrado perfecto.

  Ejemplos:

  1. $a^2 + 2az + z^2 = (a+z)^2$.
  2. $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.
  3. $c^2d^2 + 2cdz + z^2 = (cd+z)^2$.
  4. $c^4 + 8c^2 + 16 = (c^2+4)^2$.

- $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$. Cubo perfecto.

  Ejemplos:

  1. $x^3 + 3x^2z + 3xz^2 + z^3 = (x + z)^3$.
  2. $a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = (a - 2)^3$.

- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

  Ejemplo:

  $$(a - b)^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$ si n es impar.

  Ejemplo:

  $$(a + b)^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Teorema del residuo. Si $P(x)$ es un polinomio de grado n & r es una raíz (es decir, $P(r) = 0$) entonces $P(x) = (x - r)Q(x)$ donde $Q(x)$ es el cociente de dividir $P(x)$ entre $(x - r)$, y es un polinomio de grado $n - 1$.

Ejemplo 1.3.1 *$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; si $x = 1 : P(1) = 1^3 - (6 \cdot 1^2) + (11 \cdot 1) - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$, luego $P(x)$ es divisible entre $x - 1$.*

▼ En efecto

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 5x + 6 \\
\hline
x - 1 & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\
 & \underline{-x^3 + x^2} \\
 & 0 - 5x^2 + 11x \\
 & \quad \underline{5x^2 - 5x} \\
 & \qquad 0 + 6x - 6 \\
 & \qquad \quad \underline{-6x + 6} \\
 & \qquad \qquad 0
\end{array}$$

Por lo que $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$.
Y el grado de $x^2 - 5x + 6$ (que es 2) es una unidad menor que el de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (que es 3).

□

Ejercicios 1.3.2 *Soluciones en la página 12*

1. ¿Cuáles son las soluciones de $x^2 = a^2$?
2. Calcule $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

3. ¿Cuáles son las soluciones de $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$?
4. ¿Puede dar una solución o raíz de $x^3 - 8 = 0$?
5. ¿Puede dar una solución o raíz de $x^3 - a^3 = 0$?
6. ¿Puede dar una raíz de $x^3 + 8 = 0$?
7. ¿Puede dar una raíz de $x^5 - 32 = 0$?
8. ¿Puede dar una raíz de $x^5 + 32 = 0$?
9. ¿Puede dar una raíz de $x^4 - 81 = 0$?

Ejercicios 1.3.1 *Propiedades algebraicas de los números reales, página 8*

1. $\dfrac{73}{30}$.
2. $\dfrac{1}{10}$.
3. $-\dfrac{3}{2}$.
4. $-\dfrac{19}{90}$.
5. $\dfrac{10}{21}$.
6. 4.

Ejercicios 1.3.2 *página 10*

1. $x = -a$ o bien $x = a$.
2. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.
3. $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$.
4. Si, $x = 2$.
5. Si, $x = a$.
6. $x = -2$ es raíz.
7. $x = 2$.
8. $x = -2$.
9. $x = 3$.