

CAPÍTULO

1

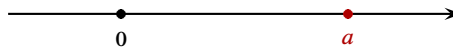
Los números reales

1

1.4 Orden de los números reales

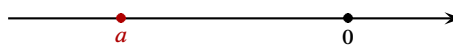
Un número a que pertenezca a los reales ($a \in \mathbb{R}$) es positivo si está a la derecha del cero; esto se denota así:

$$a > 0 \text{ o bien } 0 < a.$$



Un número a que pertenezca a los reales ($a \in \mathbb{R}$) es negativo si está a la izquierda del cero; esto se denota así:

$$a < 0 \text{ o bien } 0 > a.$$



El símbolo $>$ se lee "mayor que". El símbolo $<$ se lee "menor que".

$a > b$ o bien $b < a$ quiere decir que a está a la derecha de b o bien que b está a la izquierda de a ; también significa que $a - b > 0$.

$a \geq b$ quiere decir que $a > b$ o bien que $a = b$.
El símbolo \geq se lee "mayor o igual que".

$a \leq b$ quiere decir que $a < b$ o bien que $a = b$.
El símbolo \leq se lee "menor o igual que".

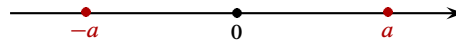
- Si dos números reales son positivos se cumple que su suma y su producto también son números positivos:

$$a > 0 \ \& \ b > 0 \Rightarrow a + b > 0 \quad \text{y también} \quad a \cdot b > 0.$$

- Ley de tricotomía. Se cumple una de tres:

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a > 0 \quad \text{o bien} \quad a = 0 \quad \text{o bien} \quad a < 0.$$

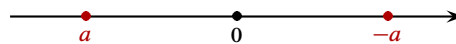
- $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$.



Ejemplo:

$$a = 5 > 0 \ \& \ -a = -5 < 0.$$

- $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$.



Ejemplo:

$$a = -3 < 0 \ \& \ -a = 3 > 0.$$

Es decir, dos puntos simétricos representan números reales con distinto signo.

Cualquier expresión que contenga uno de los cuatro símbolos $>$, $<$, \geq o bien \leq se llama desigualdad.

Una desigualdad consta de dos miembros, lo que está escrito antes del símbolo $>$, $<$, \geq o bien \leq se llama primer miembro y lo que está escrito después de cualquiera de esos símbolos se llama segundo miembro.

Ejemplo 1.4.1 Algunas desigualdades:

1. $-5 \leq 6.$

4. $x^2 < x + 2.$

2. $3 \geq 3.$

3. $\frac{3}{4}x + 1 > 7.$

5. $\frac{3x - 1}{7 + x} > 8.$

Dos desigualdades en las que aparece en ambas el símbolo $>$ o bien en ambas el símbolo $<$ se dice que son del mismo sentido.

Ejemplo 1.4.2 *Desigualdades del mismo sentido: $a > b$ & $d > c$.*

Ejemplo 1.4.3 *Desigualdades del mismo sentido: $c < d$ & $f < a$.*

Si en una desigualdad aparece el signo $>$ y en otra el signo $<$ se dice que son de sentidos contrarios.

Ejemplo 1.4.4 *Desigualdades de sentidos contrarios: $a > 7$ & $b < c$.*

Algunas propiedades de orden son las siguientes:

- Ley de tricotomía, una de tres:

$$a \text{ & } b \in \mathbb{R} \Rightarrow a > b \quad \text{o bien} \quad a = b \quad \text{o bien} \quad a < b.$$

- A los dos miembros de una desigualdad se les puede sumar una misma cantidad y se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que la dada:

$$a > b \text{ & } c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c > b + c.$$

Ejemplo:

Sabemos que $7 > 2$, entonces sumando 1 a cada miembro de la desigualdad se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que la original: $7 + 1 > 2 + 1$.
En efecto, $8 > 3$.

- Si multiplicamos los dos miembros de una desigualdad por un número positivo, se preserva el sentido de la desigualdad:

$$a > b \text{ & } c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c.$$

Ejemplo:

De $5 > 3$ se tiene $5 \cdot 2 > 3 \cdot 2$. En efecto, $10 > 6$.

- Si multiplicamos los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad:

$$a > b \text{ & } c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

Ejemplo:

De $6 < 8$ se tiene $(6)(-1) > (8)(-1)$. En efecto, $-6 > -8$.

- Sumando miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido:

$$a > b \ \& \ c > d \Rightarrow a + c > b + d.$$

Ejemplos:

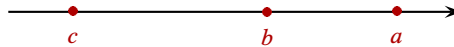
1. $5 > 4 \ \& \ 10 > 9 \Rightarrow 5 + 10 > 4 + 9.$

En efecto, $15 > 13.$

2. $5 > 4 \ \& \ -5 > -10 \Rightarrow 5 - 5 > 4 - 10.$

En efecto, $0 > -6.$

- Transitividad: $a > b \ \& \ b > c \Rightarrow a > c.$



Ejemplo:

1. $6 > 4 \ \& \ 4 > 2 \Rightarrow 6 > 2.$

- El cuadrado de cualquier número distinto de cero es positivo:

$$a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0.$$

Ejemplos:

1. El 1 es positivo: $1 = 1^2 > 0.$

2. $a = 4 \Rightarrow (4)^2 > 0.$ En efecto, $16 > 0.$

3. $a = -5 \Rightarrow (-5)^2 > 0.$ En efecto, $25 > 0.$

- $a^2 + 1 > 0$ para $a \in \mathbb{R}.$
- Cualquier potencia de un número positivo es un número positivo:

$$b > 0 \Rightarrow b^n > 0.$$

Ejemplos:

1. $3^2 > 0.$ En efecto, $9 > 0.$

2. $6^{-2} = \frac{1}{6^2} > 0.$ En efecto, $\frac{1}{36} > 0.$

- Cualquier potencia par de un número negativo es un número positivo:

$$a < 0 \Rightarrow a^n > 0 \text{ si } n \text{ es par.}$$

Ejemplo:

$$(-4)^2 > 0. \text{ En efecto, } 16 > 0.$$

- Cualquier potencia impar de un número negativo es un número negativo:

$$a < 0 \Rightarrow a^n < 0 \text{ si } n \text{ es impar.}$$

Ejemplo:

$$(-4)^3 < 0. \text{ En efecto, } -64 < 0.$$

- $0 < a < b \Rightarrow 0 < a^n < b^n$.

Ejemplo:

$$0 < 3 < 5 \Rightarrow 0 < 3^2 < 5^2. \text{ En efecto, } 0 < 9 < 25.$$

- $a < b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n > b^n > 0 & \text{si } n \text{ es par;} \\ a^n < b^n < 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

Ejemplos:

1. $-4 < -2 < 0 \Rightarrow (-4)^2 > (-2)^2 > 0. \text{ En efecto, } 16 > 4 > 0.$

2. $-4 < -2 < 0 \Rightarrow (-4)^3 < (-2)^3 < 0. \text{ En efecto, } -64 < -8 < 0.$

- $0 < a < b \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo:

$$0 < 4 < 8 \Rightarrow 0 < \sqrt{4} < \sqrt{8}. \text{ En efecto, } 0 < 2 < 2.8284.$$

- $a < b < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} < 0$ si $n \in \mathbb{N}$ es impar.

Ejemplo:

$$-64 < -8 < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{-64} < \sqrt[3]{-8} < 0. \text{ En efecto, } -4 < -2 < 0.$$

- $(-a)^{2n} = a^{2n}$ y $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos:

1. Como 6 es par ($6 = 2 \cdot 3$), entonces $(-2)^6 = 2^6 = 64$.

2. Como 3 es impar ($3 = 2 \cdot 1 + 1$), entonces $(-3)^3 = -3^3$.
En efecto, $-27 = -27$.

- Si el producto de dos números es positivo y uno de ellos es positivo el otro también lo es:

$$a \cdot b > 0 \ \& \ a > 0 \Rightarrow b > 0.$$

Ejemplo:

$$(3)(8) > 0 \ \& \ 3 > 0 \Rightarrow 8 > 0.$$

- El recíproco de un positivo es positivo: $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$.
El recíproco de un negativo es negativo: $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$.

Ejemplos:

$$1. \ 7 > 0 \Rightarrow 7^{-1} > 0. \text{ En efecto, } \frac{1}{7} > 0.$$

$$2. \ -5 < 0 \Rightarrow (-5)^{-1} < 0. \text{ En efecto, } \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5} < 0.$$

- El cociente de dos números positivos es positivo: $a > 0 \ \& \ b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > 0$.

Ejemplo:

$$2 > 0 \ \& \ 9 > 0 \Rightarrow \frac{2}{9} > 0.$$

- $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq \leq np$.

Ejercicios 1.4.1 Soluciones en la página 8

Determinar la relación de orden que hay entre los racionales siguientes:

$$1. \ \frac{11}{5} \text{ y } \frac{20}{9}.$$

$$4. \ -\frac{10}{3} \text{ y } -\frac{33}{10}.$$

$$2. \ \frac{2}{3} \text{ y } \frac{8}{13}.$$

$$5. \ -\frac{126}{315} \text{ y } -\frac{2}{5}.$$

$$3. \ \frac{441}{189} \text{ y } \frac{7}{3}.$$

$$6. \ -\frac{25}{46} \text{ y } -\frac{6}{11}.$$

7. Si a, b son dos números reales tales que $a^2 + b^2 = 0$, ¿qué se puede inferir acerca de los números a, b ?

8. Si a, b son números reales tales que $a \geq b \ \& \ a \leq b$, ¿qué se puede inferir acerca de a, b ?

Ejercicios 1.4.2 Soluciones en la página 8

1. Como $8 > 5$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$8 + c \quad ? \quad 5 + c, \text{ donde } c \in \mathbb{R}.$$

2. Como $8 > 5$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$8c \quad ? \quad 5c, \text{ donde } c > 0.$$

3. Como $8 > 5$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$8c \quad ? \quad 5c, \text{ donde } c < 0.$$

4. Como $8 > 5$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$8 + 8 \quad ? \quad 5 + 5.$$

5. Como $5 > 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$5^{14} \quad ? \quad 0^{14}(= 0).$$

6. Como $5 > 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$5^{13} \quad ? \quad 0.$$

7. Como $5 > 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$-5 \quad ? \quad 0.$$

8. Como $-5 < 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$(-5)^{14} \quad ? \quad 0.$$

9. Como $-5 < 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$(-5)^{13} \quad ? \quad 0.$$

10. Como $-8 < -5 < 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$(-8)^2 \quad ? \quad (-5)^2.$$

11. Como $-8 < -5 < 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$(-8)^3 \quad ? \quad (-5)^3.$$

12. ¿Cómo es el producto de dos números positivos?

13. ¿Cómo es el producto de un número positivo por un negativo?

14. ¿Cómo es el producto de dos números negativos?

Ejercicios 1.4.1 Orden de los números reales, página 6

1. $\frac{11}{5} < \frac{20}{9}$.

2. $\frac{2}{3} > \frac{8}{13}$.

3. $\frac{441}{189} = \frac{7}{3}$.

4. $-\frac{10}{3} < -\frac{33}{10}$.

5. $-\frac{126}{315} = -\frac{2}{5}$.

6. $-\frac{25}{46} > -\frac{6}{11}$.

7. $a = 0, b = 0$.

8. $a = b$.

Ejercicios 1.4.2 página 6

1. $8 > 5 \Leftrightarrow 8 + c > 5 + c$.

2. $8 > 5 \ \& \ c > 0 \Rightarrow 8c > 5c$.

3. $8 > 5 \ \& \ c < 0 \Rightarrow 8c < 5c$.

4. $8 + 8 > 5 + 5$.

5. $5^{14} > 0$.

6. $5^{13} > 0$.

7. $-5 < 0$.

8. $(-5)^{14} > 0$.

9. $(-5)^{13} < 0$.

10. $(-8)^2 > (-5)^2$.

11. $(-8)^3 < (-5)^3 < 0$.

12. Positivo.

13. Negativo.

14. Positivo.