CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN E1300, 29-OCTUBRE-1996

(1) $\dfrac{|\,2x-3\,|}{x+1} > 4.$

(2) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x-3 & \text{si } x \le -1 \\ ax^2+b & \text{si } -1 < x < 2 \\ c & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{3}{2}x+5 & \text{si } x > 2\,. \end{cases}$$

Encontrar los valores de a, b, c para que la función sea continua en todo punto.

(3) Encontrar las dos ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = x^2 + 1$ que pasan por el origen.

(4) Se desea hacer una caja abierta con una pieza cuadrada de material de 12 cm de lado, cortando cuadritos iguales de cada esquina. Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.

(5) Sea la función $y = \dfrac{x}{x^2-2x} - 3\,.$

(a) Encontrar las asíntotas verticales y horizontales
(b) Encontrar los puntos de discontinuidad y clasificarlos
(c) Hacer un bosquejo de la gráfica

(6) Sea la función $y = x^4 - 4x^3$.

(a) Encontrar las raíces, los puntos críticos y los puntos de inflexión de la función
(b) Encontrar los intervalos de monotonía y de concavidad de la función
(c) Clasificar los puntos críticos especificando el criterio que usa
(d) Graficar la función

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) $\dfrac{|\,2x-3\,|}{x+1} > 4.$

▼ Sabemos que $x + 1 \neq 0$.

Consideramos dos casos:

(a) $x + 1 > 0 \Rightarrow$ La desigualdad propuesta equivale a

$$|\,2x-3\,| > 4(x+1) \Leftrightarrow |\,2x-3\,| > 4x+4$$

y ésta, a su vez, a las dos desigualdades

$$2x-3 > 4x+4 \text{ y } 2x-3 < -(4x+4) \Leftrightarrow 2x-3 < -4x-4.$$

La primera equivale a

$$2x-4x > 3+4 \Leftrightarrow -2x > 7 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{2};$$

pero, como $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, por este camino no existe $x \in \mathbb{R}$ que satisfaga a la desigualdad propuesta.

Ahora veamos la segunda desigualdad:

$$2x-3 < -4x-4 \Leftrightarrow 2x+4x < 3-4 \Leftrightarrow 6x < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{6}\,.$$

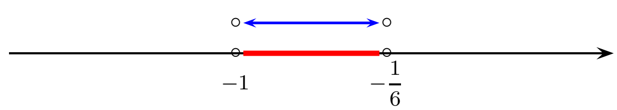
Como para este caso $x > -1 \Rightarrow x \in \left(-1, -\dfrac{1}{6}\right)$.

(b) $x + 1 < 0$

No tenemos solución en este caso, puesto que $|\,2x-3\,| \geq 0 \Rightarrow \dfrac{|\,2x-3\,|}{x+1} \leq 0$, no puede ser > 4

En resumidas cuentas el conjunto solución de la desigualdad propuesta es:

$$CS = \left(-1, -\frac{1}{6}\right).$$



Comprobemos por ejemplo que $x = -\dfrac{1}{6}$ no satisface a la desigualdad original:

$$\frac{\left|\,2\left(-\frac{1}{6}\right)-3\,\right|}{-\frac{1}{6}+1} = \frac{\left|\,-\frac{1}{3}-3\,\right|}{\frac{5}{6}} = \frac{\left|\,-\frac{10}{3}\,\right|}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{10\times 6}{3\times 5} = 2\times 2 = 4 \not> 4.$$

□

(2) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x-3 & \text{si } x \leq -1 \\ ax^2+b & \text{si } -1 < x < 2 \\ c & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{3}{2}x+5 & \text{si } x > 2\,. \end{cases}$$

Encontrar los valores de a, b, c para que la función sea continua en todo punto.

▼ En los únicos puntos en donde hay duda de la continuidad es en $x = -1$ y en $x = 2$ donde la función deja de ser lineal para pasar a ser cuadrática y viceversa, por lo que ahí tenemos que asegurar que:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) \text{ y que } \lim_{x\to 2} f(x) = f(2).$$

Es decir, que:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = -2(-1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

y que

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = c\,.$$

De aquí obtenemos las siguientes ecuaciones, dado que:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (ax^2 + b) = a(-1)^2 + b = a + b\,;$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (-2x - 3) = -2(-1) - 3 = 2 - 3 = -1\,;$$

por lo que $a + b = -1$.

También:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{3}{2}x + 5\right) = \frac{3}{2}(2) + 5 = 3 + 5 = 8\,;$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax^2 + b) = a(2)^2 + b = 4a + b\,;$$

luego, $4a + b = 8$ y también $c = 8$.
Resolvamos por último el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 4a + b = 8\,. \end{cases}$$

Restando de la segunda la primera obtenemos que:

$$3a = 8 - (-1) \Leftrightarrow 3a = 8 + 1 \Leftrightarrow 3a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{9}{3} \Leftrightarrow a = 3.$$

y sustituyendo este valor en la primera tenemos:

$$3 + b = -1 \Leftrightarrow b = -1 - 3 \Leftrightarrow b = -4.$$

Con estos valores la función continua en $\mathbb{R}$ es:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 - 4 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 8 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{3}{2}x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

o bien:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 - 4 & \text{si } -1 < x < 2 \\ \dfrac{3}{2}x + 5 & \text{si } x \ge 2\,. \end{cases}$$

□

(3) Encontrar las dos ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = x^2 + 1$ que pasan por el origen.

▼ Cualquier punto de la gráfica de la función $y = x^2 + 1$ tiene por coordenadas $(x_1, x_1^2 + 1)$ y la pendiente de cualquier recta tangente es $y' = 2x_1$.
Luego, la ecuación de cualquier recta tangente es de la forma:

$$y - (x_1^2 + 1) = 2x_1(x - x_1).$$

Ahora, si va a pasar por el origen $(0, 0)$, estas coordenadas la deben satisfacer, por lo que

$$-x_1^2 - 1 = 2x_1(-x_1) \Leftrightarrow -x_1^2 - 1 = -2x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow |\, x_1 \,| = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1\,;$$

entonces las dos ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $y = x^2 + 1$ que pasan por el origen son:

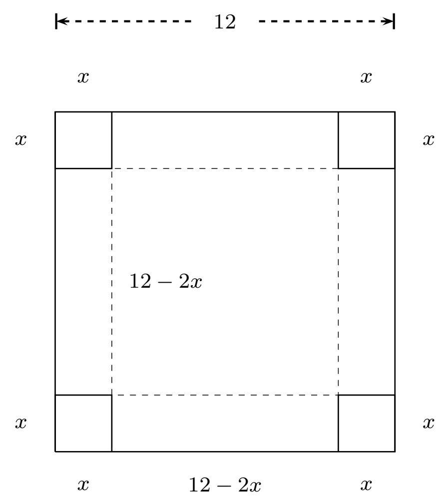
$$y - (1^2 + 1) = 2(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x$$

y también:

$$y - [(-1)^2 + 1] = 2(-1)[x - (-1)] \Leftrightarrow y - 2 = -2x - 2 \Leftrightarrow y = -2x.$$

(4) Se desea hacer una caja abierta con una pieza cuadrada de material de 12 cm de lado, cortando cuadritos iguales de cada esquina. Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.

▼ Si componemos la figura, tenemos:



El volumen, que nos piden es:

$$V(x) = (12 - 2x)^2 x = x(4x^2 - 48x + 144) = 4x^3 - 48x^2 + 144x\,.$$

Sus puntos críticos son:

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{96 \pm \sqrt{9216 - 6912}}{24} = \frac{96 \pm \sqrt{2304}}{24} = \frac{24 \pm 48}{24} = \begin{cases} 3 \\ -1\,. \end{cases}$$

Podemos desechar $x = -1$, pues físicamente no tiene sentido que sea negativo, en cuyo caso, para $x = 3$ cm el volumen es:

$$V(3) = 3[12 - 2(3)]^2 = 3(12 - 6)^2 = 3 \times 6^2 = 3 \times 36 = 108 \text{ cm}^3\,.$$

Como:

$$V''(x) = 24x - 96 \text{ y } V''(3) = 72 - 96 < 0\,,$$

se trata de un máximo.

□

(5) Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x} - 3$.

(a) Encontrar las asíntotas verticales y horizontales

▼ Como $x^2 - 2x = x(x-2) \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$.

En su dominio:

$$f(x) = \frac{x}{x(x-2)} - 3 = \frac{1}{x-2} - 3 = \frac{1 - 3x + 6}{x-2} = \frac{-3x+7}{x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{-3x+7}{x-2} = \pm\infty \text{ pues}$$

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} (-3x+7) = -3(2) + 7 = -6 + 7 = 1 > 0 \text{ y } \lim_{x\to 2^{\pm}} (x-2) = 0^{\pm};$$

por lo que la recta $x = 2$ es asíntota vertical.

En cambio $x = 0$ no es asíntota vertical pues:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-3x+7}{x-2} = \frac{-3(0)+7}{0-2} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}.$$

Para calcular las asíntotas horizontales estimamos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x+7}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(-3 + \dfrac{7}{x}\right)}{x\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3 + \dfrac{7}{x}}{1 - \dfrac{2}{x}} = \frac{-3+0}{1-0} = \frac{-3}{1} = -3.$$

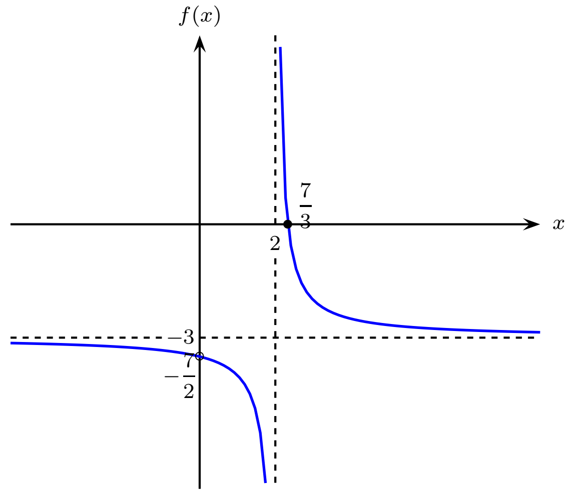
Por lo que la recta $y = -3$ es asíntota horizontal.

(b) Encontrar los puntos de discontinuidad y clasificarlos

▼ Como $f(x) = \dfrac{x - 3(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x}$ es una función racional, es continua en su dominio y, de acuerdo a lo calculado en el inciso anterior, en $x = 0$ la discontinuidad es removible; en $x = 2$ la discontinuidad es esencial, de hecho infinita.

(c) Hacer un bosquejo de la gráfica

▼ Una gráfica de la función $f(x)$ que cumple con lo anterior es:



La única raíz de $f(x)$ es cuando:

$$-3x+7=0 \Leftrightarrow -3x=-7 \Leftrightarrow x=\frac{-7}{-3}=\frac{7}{3}\,.$$

(6) Sea la función $f(x)=x^4-4x^3$.

(a) Encontrar las raíces, los puntos críticos y los puntos de inflexión de la función

▼ Tenemos que

$$x^4-4x^3=0 \Leftrightarrow x^3(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \;\&\; x=4 \text{ son las raíces de la función};$$

$$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \;\&\; x=3 \text{ son los puntos críticos};$$

$$f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \;\&\; x=2\,;$$

así mismo, para el signo de la segunda derivada usamos la tabla

Intervalo:	Un valor de f''	$f''(x)$ es
$(-\infty,0)$	$f''(-1)=(-12)(-3)>0$	positiva
$(0,2)$	$f''(1)=12(1-2)<0$	negativa
$(2,+\infty)$	$f''(3)=12(3)(3-2)>0$	positiva

Entonces los puntos: $[0,f(0)]=(0,0)$ & $[2,f(2)]=[2,2^3(2-4)]=[2,8(-2)]=(2,-16)$ son de inflexión, pues en ellos la gráfica cambia el sentido de su concavidad.

(b) Encontrar los intervalos de monotonía y de concavidad de la función

▼ Veamos el signo de la primera derivada

Intervalo:	Un valor de f' :	$f'(x)$ es	$f(x)$ es
$(-\infty,0)$	$f'(-1)=4(-1)^2(-1-3)<0$	negativa	decreciente
$(0,3)$	$f'(1)=4(1)^2(1-3)<0$	negativa	decreciente
$(3,+\infty)$	$f'(4)=4(4)^2(4-3)>0$	positiva	creciente

Por lo calculado en el inciso anterior:

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty, 0) \bigcup (2, \infty)$ y convexa en $(0, 2)$, ya que en tales conjuntos la segunda derivada es positiva y negativa, respectivamente.

(c) Clasificar los puntos críticos especificando el criterio que usa

▼ Como $f(x)$ pasa de ser decreciente a ser creciente, por el criterio de la primera derivada, concluimos que en el punto:

$$[3, f(3)] = [3, 3^3(3 - 4)] = [3, 27(-1)] = (3, -27)$$

hay un mínimo que resulta ser absoluto; en cambio en el origen no hay valor extremo pues la función pasa de ser decreciente a ser decreciente también.

(d) Graficar la función

▼ Podemos calcular también

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left[x^4 \left(1 - \frac{4}{x} \right) \right] = +\infty .$$

Con todo lo anterior, la gráfica de $f(x)$ es: