CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN PARCIAL II E1100

(1) Un objeto se lanza hacia arriba según la ley de movimiento:

$$s(t) = 15t - 4.9t^2$$

donde $s(t)$ denota la posición en metros del objeto a los t segundos. Calcular la velocidad instantánea del objeto a los 2 segundos.

(2) Sea la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < -3 \\ c & \text{si } x = -3 \\ 4 - x^2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leq x\,. \end{cases}$$

Determinar los valores de las constantes a, b, c para que la función $f(x)$ resulte continua en su dominio.

(3) Sea el polinomio

$$p(x) = x^3 - 4x + 2\,.$$

Aproxime en el intervalo $[1, 2]$ una raíz del polinomio con error menor que $\dfrac{1}{4}$.

(4) Considere la función $f(x)$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 7x + 12}\,.$$

(a) Determine dominio, raíces e intervalos de continuidad
(b) Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales
(c) Haga un esbozo gráfico de la función

(5) Sea la función definida por

$$f(x) = n, \text{ para cada } x \in [n, n+1), \text{ donde } n = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(a) Grafique la función $f(x)$
(b) Calcular para $n = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

$\lim\limits_{x \to n^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to n^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to n} f(x)$ y

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ donde $a \neq n$

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Un objeto se lanza hacia arriba según la ley de movimiento:

$$s(t) = 15t - 4.9t^2$$

donde $s(t)$ denota la posición en metros del objeto a los t segundos. Calcular la velocidad instantánea del objeto a los 2 segundos.

▼ Calculamos el cociente diferencial de la función $s(t)$ en el tiempo $t = 2$:

$$\frac{s(t) - s(2)}{t - 2} = \frac{(15t - 4.9t^2) - (15 \times 2 - 4.9 \times 2^2)}{t - 2} = \frac{15(t - 2) - 4.9(t^2 - 4)}{t - 2} =$$

$$= \frac{15(t - 2) - 4.9(t - 2)(t + 2)}{t - 2} = \frac{(t - 2)[15 - 4.9(t + 2)]}{t - 2} = 15 - 4.9(t + 2)\,.$$

Esta expresión representa la velocidad media para valores de t cercanos a 2 segundos.
La velocidad instantánea del objeto a los 2 segundos se calcula mediante

$$s'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2}(15 - 4.9(t + 2)) = 15 - 4.9(4) = -4.6 \text{ m/s.}$$

□

(2) Sea la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < -3 \\ c & \text{si } x = -3 \\ 4 - x^2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leq x\,. \end{cases}$$

Determinar los valores de las constantes a, b, c para que la función $f(x)$ resulte continua en su dominio.

▼ La función es continua en todos los números, excepto posiblemente en $x = -3$ y en $x = 1$.
En estos puntos se tiene que, para que exista continuidad, se debe cumplir:

$$\lim_{x \to -3} f(x) = f(-3) \;\&\; \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)\,.$$

(a) En $x = -3$ existe $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ si

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^+} f(x)\,.$$

Calculamos cada límite por separado:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} (ax + b) = -3a + b\,;$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} (4 - x^2) = 4 - (-3)^2 = 4 - 9 = -5\,.$$

Igualando ambos límites obtenemos la condición

$$-3a + b = -5\,.$$

(b) En $x = 1$ existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ si

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)\,.$$

Calculamos cada límite por separado:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (4-x^2) = 4-1 = 3 \; :$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax+b) = a+b\,.$$

Igualando ambos límites obtenemos la condición

$$a+b=3\,.$$

Entonces, las condiciones que deben cumplir a, b para la continuidad de la función $f(x)$ son

$$-3a+b=-5\,;$$
$$a+b=3\,.$$

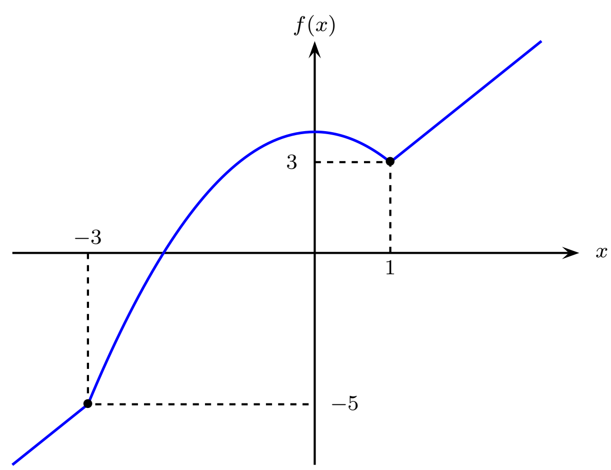
Éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Multiplicando la segunda ecuación por -1, obtenemos $-a-b=-3$.
Se suma esta ecuación a la primera y se obtiene $-4a=-8 \Rightarrow a=2$.
Sustituimos este valor en la segunda ecuación y obtenemos $2+b=3 \Rightarrow b=3-2=1$.
Tenemos, por último, que para que la función sea continua en $x=-3$ se debe cumplir la condición

$$\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3)\,.$$

Por lo anterior, esto se traduce en $-5=c$.
Con estos valores la función continua en todos los números reales es

$$g(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<-3 \\ -5 & \text{si } x=-3 \\ 4-x^2 & \text{si } -3<x<1 \\ 2x+1 & \text{si } 1\le x \end{cases}$$

cuya gráfica es



$\square$

(3) Sea el polinomio

$$p(x)=x^3-4x+2\,.$$

Aproxime en el intervalo $[1,2]$ una raíz del polinomio con error menor que $\dfrac{1}{4}$.

▼ Calculamos el valor del polinomio en los extremos del intervalo

$$p(1) = 1^3 - 4 \times 1 + 2 = 1 - 4 + 2 = -1\,;$$
$$p(2) = 2^3 - 4 \times 2 + 2 = 8 - 8 + 2 = 2\,.$$

Ya que el polinomio es una función continua, por el teorema del Valor Intermedio, toma todos los valores entre $[-1, 2]$ cuando x recorre el intervalo $[1, 2]$.
En particular $0 \in [-1, 2]$.
Entonces, existe $c \in (1, 2)$ tal que $p(c) = 0$ (una raíz del polinomio).
El intervalo $[1, 2]$ tiene longitud $2 - 1 = 1$.
Se desea un intervalo de longitud menor que $\frac{1}{4} = 0.25$ donde se garantice la existencia de una raíz.
Para esto, tomamos arbitrariamente un número c_1 a la derecha de 1 y otro número c_2 que cumpla las condiciones $1 < c_1 < c_2 < 2$; comprobamos si continúa existiendo un cambio de signo al evaluar el polinomio en estos puntos.
Tomemos $c_1 = 1.3$ y $c_2 = 1.6$:

$$p(1.3) = (1.3)^3 - 4(1.3) + 2 = 2.197 - 5.2 + 2 = -1.003\,;$$
$$p(1.6) = (1.6)^3 - 4(1.6) + 2 = 4.096 - 6.4 + 2 = -0.304\,.$$

Ambos valores negativos.
Para intentar alcanzar un valor positivo del polinomio, los calculos anteriores sugieren tomar, arbitrariamente, $c_3 = 1.8$

$$p(1.8) = (1.8)^3 - 4(1.8) + 2 = 5.832 - 7.2 + 2 = 0.632\,.$$

Es decir, la función cambia de signo en los extremos del intervalo $[1.6, 1.8]$.
Esto garantiza que existe una raíz dentro de este intervalo.
Lo longitud de $[1.6, 1.8]$ es $1.8 - 1.6 = 0.2 < \frac{1}{4} = 0.25$.
Éste es uno de los posibles intervalos solicitados.

□

(4) Considere la función $f(x)$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 7x + 12}\,.$$

(a) Determine dominio, raíces e intervalos de continuidad

▼ "Simplificamos" la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 7x + 12} = \frac{(x + 4)(x - 1)}{(x + 4)(x + 3)} = \frac{x - 1}{x + 3} \text{ si } x + 4 \neq 0\,.$$

Entonces, hallamos:
Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{-4, -3\}$.
Raíces: $x = 1$.
La función es continua en todo su dominio ya que

$$\lim_{x \to -4} f(x) = \lim_{x \to -4} \frac{x - 1}{x + 3} = \frac{-4 - 1}{-4 + 3} = \frac{-5}{-1} = 5 \text{ y que}$$
$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{x - 1}{x + 3} = \pm\infty\,.$$

Podemos afirmar que existe una discontinuidad removible en $x = -4$ y una discontinuidad esencial (infinita) en $x = -3$.

□

(b) Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales

▼ Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1\,.$$

Así, $y = 1$ es una asíntota horizontal.
La ecuación de la asíntota vertical es $x = -3$.
Vamos a calcular los límites laterales en $x = -3$:

(i) Por la derecha, es decir, si $x > -3 \Rightarrow x + 3 > 0$, el

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x-1}{x+3} = \lim_{x\to -3^+} (x-1) \times \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3} = (-4) \times \text{``}\left(\frac{1}{0^+}\right)\text{''} = -\infty\,.$$

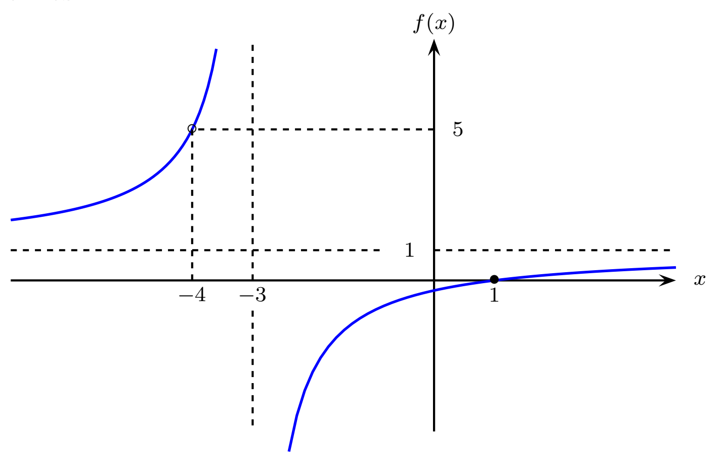
(ii) Por la izquierda, es decir, si $x < -3 \Rightarrow x + 3 < 0$, el

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x-1}{x+3} = \lim_{x\to -3^-} (x-1) \times \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x+3} = (-4) \times \text{``}\left(\frac{1}{0^-}\right)\text{''} = +\infty\,.$$

□

(c) Haga un esbozo gráfico de la función

▼ La gráfica de la función es



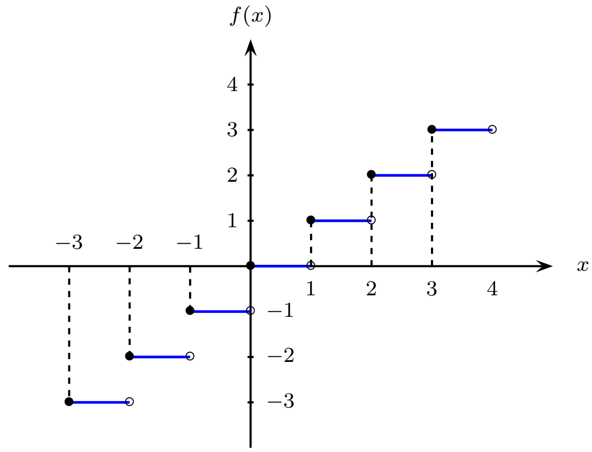
□

(5) Sea la función definida por

$$f(x) = n,\ \text{para cada } x \in [n, n+1),\ \text{donde } n = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$$

(a) Grafique la función $f(x)$

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:



□

(b) Calcular para $n = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

▼ Tenemos que

$$\lim_{x \to n^-} f(x);\ \lim_{x \to n^+} f(x);\ \lim_{x \to n} f(x)\,;$$
$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} (n-1) = n - 1\,;$$
$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} n = n\,.$$

Puesto que

$$\lim_{x \to n^-} f(x) \neq \lim_{x \to n^+} f(x), \text{ no existe } \lim_{x \to n} f(x)\,.$$

Así también constatamos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = n \text{ si } a \in (n, n+1)\,.$$

□