CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E2000

(1) Un ranchero tiene 30 m de malla para cercar un terreno rectangular, ¿qué dimensiones deberá tener si se requiere que su área sea de cuando menos 50 m^2?

(2) La cantidad de cafeterías $C(t)$, en la ciudad de Guadalajara, para el periodo $1990-2000$ se pudo ajustar como la siguiente función del tiempo t (en años) a partir de 1990:

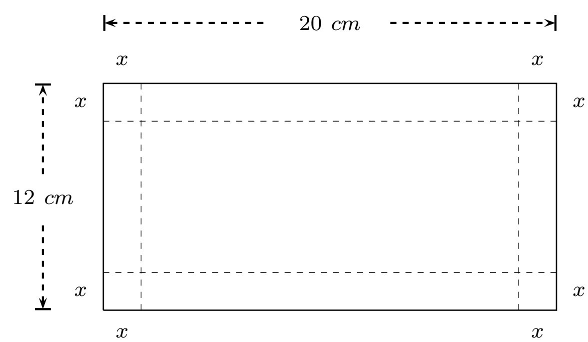
$$C(t)=\begin{cases} 300t+200 & \text{si } 0\le t\le 4\\ 800(t-7)^2+480 & \text{si } 4<t\le 10.\end{cases}$$

(a) Bosqueje la gráfica de $C(t)$

(b) ¿En qué año hubo la mayor cantidad de cafeterías del periodo indicado? ¿En qué año hubo la menor cantidad?

(c) Determine los periodos en los cuales la cantidad de cafeterías en Guadalajara fue menor a 800

(3) Se desea construir una caja rectangular sin tapa, a partir de un trozo rectangular de 12×20 cm al que se le recortan cuadrados de longitud x en cada esquina, como se ilustra en la figura.



Exprese el volumen de la caja en función de x.

(4) Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } -4\le x<-2\\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } -2\le x<2\\ 3 & \text{si } \ \ 2\le x<4.\end{cases}$$

(a) Determinar su dominio, raíces, rango, intervalos de monotonía así como su gráfica

(b) A partir de la gráfica de f, obtener la gráfica de $g(x)=2f(x+1)$

(5) Sean $f(x)=\sqrt{x+25}$ & $g(x)=x^2-10x$.
Determine las fórmulas y dominio de las funciones siguientes:

(a) $\dfrac{f}{g}$

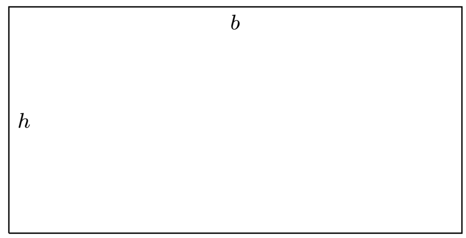
(b) $f\circ g$

canek.azc.uam.mx: 1/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Un ranchero tiene 30 m de malla para cercar un terreno rectangular, ¿qué dimensiones deberá tener si se requiere que su área sea de cuando menos 50 m^2?

▼ El dibujo nos representa visualmente el terreno.



El área del rectángulo es

$$A = b \times h.$$

Luego,

$$b \times h \geq 50.$$

El perímetro es

$$P = 2b + 2h;$$

entonces,

$$2b + 2h = 30 \Rightarrow b + h = 15 \Rightarrow b = 15 - h.$$

Sustituyendo en la desigualdad tenemos:

$$(15 - h)h \geq 50 \Rightarrow 15h - h^2 - 50 \geq 0 \Rightarrow h^2 - 15h + 50 \leq 0 \Rightarrow (h - 5)(h - 10) \leq 0$$

esto es, la desigualdad se cumple si:

$$\begin{array}{ccc} h - 5 \geq 0 \ \& \ h - 10 \leq 0 & \text{o bien} & h - 5 \leq 0 \ \& \ h - 10 \geq 0 \\ h \geq 5 \ \& \ h \leq 10 & \text{o bien} & h \leq 5 \ \& \ h \geq 10 \\ h \in [5, 10] & \text{o bien} & h \in \emptyset. \end{array}$$

Luego, la desigualdad se cumple si

$$h \in [5, 10] \ \text{ y } b = 15 - h$$

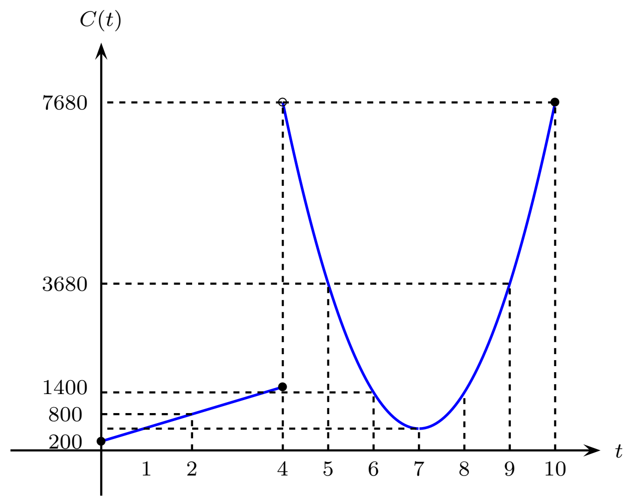
□

(2) La cantidad de cafeterías $C(t)$, en la ciudad de Guadalajara, para el periodo $1990 - 2000$ se pudo ajustar como la siguiente función del tiempo t (en años) a partir de 1990:

$$C(t) = \begin{cases} 300t + 200 & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ 800(t - 7)^2 + 480 & \text{si } 4 < t \leq 10. \end{cases}$$

(a) Bosqueje la gráfica de $C(t)$

▼ La gráfica es:



□

(b) ¿En qué año hubo la mayor cantidad de cafeterías del periodo indicado? ¿En qué año hubo la menor cantidad?

▼ En 2000 había 7 680 cafeterías y en 1990 solamente 200, el mayor y el menor número de cafeterías respectivamente.

□

(c) Determine los periodos en los cuales la cantidad de cafeterías en Guadalajara fue menor a 800

▼ Veamos primero

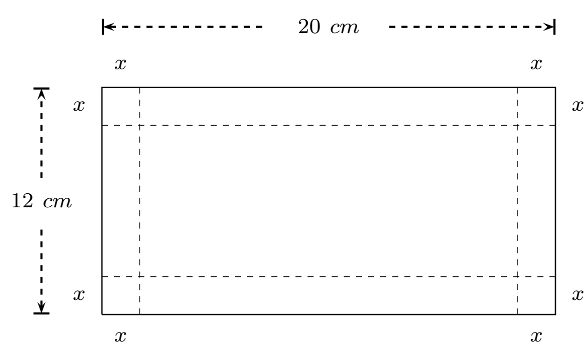
$$300t + 200 < 800 \Rightarrow 300t < 600 \Rightarrow t < 2.$$

Luego, entre 1990 y 1992 había menos de 800 cafeterías.
También analicemos

$$800(t-7)^2 + 480 < 800 \Rightarrow 800(t-7)^2 < 320 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (t-7)^2 < \frac{2}{5} \Rightarrow |\, t-7\,| < \sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0.63 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -0.63 < t-7 < 0.63 \Rightarrow 7 - 0.63 < t < 7.63 \Rightarrow 6.37 < t < 7.63;$$

luego desde el final de abril de 1996 a finales de agosto de 1997 (aproximadamente) también había menos de 800 cafeterías. □

(3) Se desea construir una caja rectangular sin tapa, a partir de un trozo rectangular de 12×20 cm al que se le recortan cuadrados de longitud x en cada esquina, como se ilustra en la figura.



Exprese el volumen de la caja en función de x.

▼ La base de la caja es un rectángulo de dimensiones $20-2x$ por $12-2x$ y de altura x, luego el volumen V es el área de la base por la altura:

$$V = (20-2x)(12-2x)x.$$

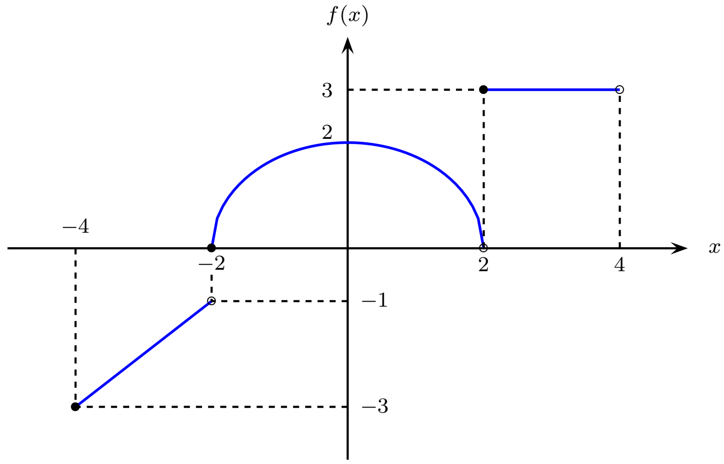
□

(4) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -4 \le x < -2 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } -2 \le x < 2 \\ 3 & \text{si } \quad 2 \le x < 4. \end{cases}$$

(a) Determinar su dominio, raíces, rango, intervalos de monotonía así como su gráfica

▼ La gráfica primero:

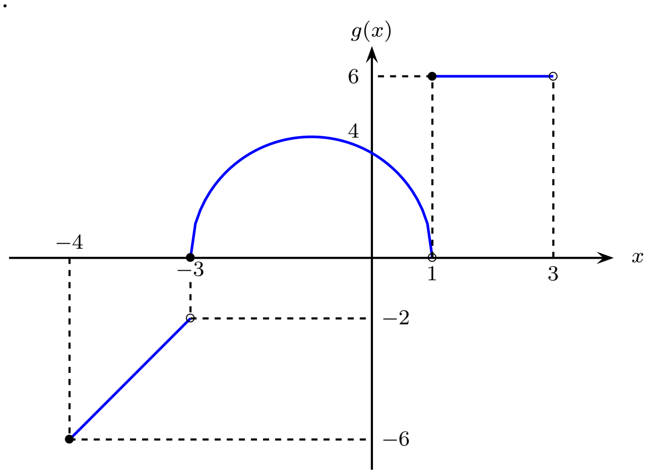


$D_f = [-4, 4)$.
Raíz: $x = -2$.
Rango: $[-3,-1) \bigcup [0,2] \bigcup \{3\}$.
La función $f(x)$ es creciente en $[-4,0]$ y es decreciente en $[0,2)$.

□

(b) A partir de la gráfica de f, obtener la gráfica de $g(x) = 2f(x+1)$

▼ Esta nueva gráfica es:



Observemos que la gráfica de $g(x)$ se obtiene a partir de la de $f(x)$ desplazándola 1 unidad a la izquierda y dilantándola 2 unidades, es decir:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 2f(x+1) = \\
&= \begin{cases} 2[(x+1)+1] & \text{si } -4 \leq x+1 < -2 \\ 2 \times \sqrt{4-(x+1)^2} & \text{si } -2 \leq x+1 < 2 \\ 2 \times 3 & \text{si } \quad 2 \leq x+1 < 4 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 2x+4 & \text{si } -5 \leq x < -3 \\ 2\sqrt{3-x^2-2x} & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ 6 & \text{si } \quad 1 \leq x < 3. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Por lo que

$$
\begin{gathered}
g(-5)[= 2f(-4)] = -6; \\
g(-3^-)[= 2f(-2^-)] = -2; \\
g(-3)[= 2f(-2)] = 0; \\
g(-1)[= 2f(0)] = 4; \\
g(1^-)[= 2f(2^-)] = 0; \\
g(1)[= 2f(2)] = 6; \\
g(3^-)[= 2f(4^-)] = 6.
\end{gathered}
$$

□

(5) Sean $f(x) = \sqrt{x+25}$ & $g(x) = x^2 - 10x$.
Determine las fórmulas y dominio de las funciones siguientes:

(a) $\dfrac{f}{g}$

▼ Calculamos:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+25}}{x^2-10x}.$$

$D_f = [-25, \infty)$ & $D_g = \mathbb{R}$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x = x(x-10) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = 10.$$

Entonces,

$$D_{\frac{f}{g}} = \left\{ D_f \bigcap D_g \right\} - \left\{ x \in D_g \,\middle|\, g(x) = 0 \right\};$$

luego,

$$D_{\frac{f}{g}} = [-25, +\infty) - \{ 0, 10 \}.$$

□

(b) $f \circ g$

▼ Tenemos ahora:

$$
\begin{gathered}
(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 10x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25} = \sqrt{(x-5)^2} = |\, x - 5 \,|; \\
D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 10x \geq -25 \right\}.
\end{gathered}
$$

Tenemos que

$$x^2 - 10x \geq -25 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 \geq 0,$$

pero esto lo cumple cualquier $x \in \mathbb{R}$, pues el cuadrado de cualquier número es no negativo, por lo que

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R}\,.$$

$\square$