

**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E0800**

(A) PRIMER PARCIAL

- (1) $\frac{2x - 9}{x - 1} \geq 8$.
- (2) $2x^2 + 7x - 5 \leq 2x - 2$.
- (3) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 3 & \text{si } x < -1; \\ |x^2 - 3| & \text{si } -1 \leq x < 2; \\ \frac{1}{x - 1} & \text{si } 2 \leq x, \end{cases}$$

obtener la gráfica de f , su dominio, rango y raíces.

- (4) Si $f(x) = \sqrt{4 - x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.
- (a) Obtenga reduciendo a su mínima expresión $\left(\frac{f - g}{f^2}\right)(x)$, así como $(g \circ f)(x)$
- (b) Obtenga los dominios de f , g , $f - g$, y las funciones $g \circ f$, $\frac{f - g}{f^2}$
- (5) Expresar el área de un triángulo equilátero como función de la longitud de uno de sus lados.

(B) SEGUNDO PARCIAL

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 + 5}}$.
- (3) Para la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$, obtener
- (a) Dominio y puntos de intersección con el eje x
- (b) Intervalos de continuidad
- (c) Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales
- (d) Bosquejo gráfico
- (4) Determine los valores de las constantes c & k que hacen a la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1; \\ cx + k & \text{si } 1 < x < 4; \\ -2x & \text{si } 4 \leq x. \end{cases}$$

continua en todo \mathbb{R} ; dibuje la gráfica de esa función.

- (5) Si $H(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$, ¿qué tipo de discontinuidad hay en $x = 0$? ¿Esencial? ¿Removible? Justifique su respuesta.

(C) TERCER PARCIAL

- (1) Derivar la función $f(x) = \sqrt{(1-x)^2 + \sqrt{x-1}}$.
- (2) Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, determinando
- Domínio, raíces y simetría
 - Asíntotas
 - Intervalos de monotonía
 - Intervalos de concavidad
 - Puntos críticos y su clasificación. Puntos de inflexión.
- (3) A las 13:00 horas un barco A se encuentra 20 millas al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 millas/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 millas/h. ¿A qué hora se alcanza la distancia mínima entre las dos embarcaciones?
- (4) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 3x - 1$ en el punto $(0, -1)$.

Respuestas

(A) PRIMER PARCIAL

(1) $\frac{2x-9}{x-1} \geq 8.$

▼ Esta desigualdad es equivalente a

$$\frac{2x-9}{x-1} - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-9-8x+8}{x-1} = \frac{-6x-1}{x-1} = -\frac{6x+1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6x+1}{x-1} \leq 0.$$

Y esta última se cumple si

$$6x+1 \geq 0 \ \& \ x-1 < 0 \quad \text{o bien} \quad 6x+1 \leq 0 \ \& \ x-1 > 0;$$

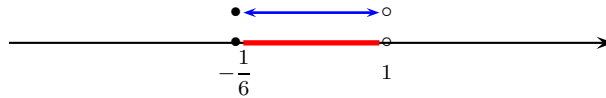
$$6x \geq -1 \ \& \ x < 1 \quad \text{o bien} \quad 6x \leq -1 \ \& \ x > 1;$$

$$x \geq -\frac{1}{6} \ \& \ x < 1 \quad \text{o bien} \quad x \leq -\frac{1}{6} \ \& \ x > 1;$$

$$x \in \left[-\frac{1}{6}, 1\right) \quad \text{o bien} \quad x \in \emptyset.$$

Luego el conjunto solución es

$$\left[-\frac{1}{6}, 1\right)$$



□

(2) $2x^2 + 7x - 5 \leq 2x - 2.$

▼ La desigualdad equivale a

$$2x^2 + 7x - 5 - 2x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 \leq 0.$$

Resolvamos la igualdad

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2}; \\ -3. \end{cases}$$

Y entonces, $2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$; el signo de este trinomio nos lo da la tabla siguiente:

Intervalo	Signo de		
	$x + 3$	$x - \frac{1}{2}$	$2x^2 + 5x - 3$
$x < -3 \left(< \frac{1}{2}\right)$	-	-	+
$-3 < x < \frac{1}{2}$	+	-	-
$x > \frac{1}{2} \left(> -3\right)$	+	+	+

Por lo que el conjunto solución de la desigualdad propuesta es

$$\left[-3, \frac{1}{2}\right]$$



□

(3) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 3 & \text{si } x < -1; \\ |x^2 - 3| & \text{si } -1 \leq x < 2; \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } 2 \leq x, \end{cases}$$

obtener la gráfica de f , su dominio, rango y raíces.

▼ Como

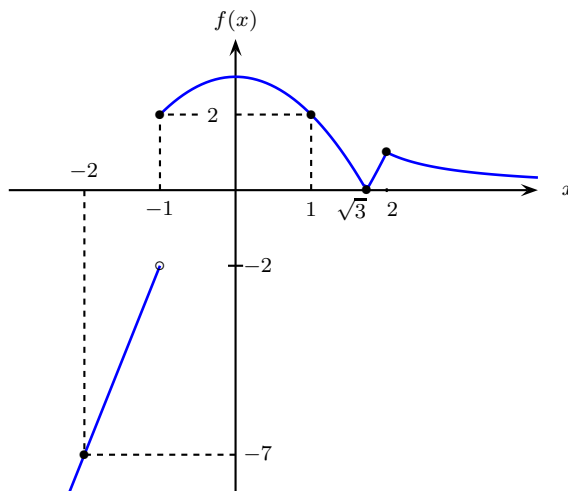
$$x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{3} \text{ o bien } x \leq -\sqrt{3},$$

entonces,

$$f(x) = |x^2 - 3| = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } \sqrt{3} \leq x < 2 \\ -(x^2 - 3) & \text{si } -1 \leq x < \sqrt{3} \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{si } -1 \leq x < \sqrt{3}; \\ x^2 - 3 & \text{si } \sqrt{3} \leq x < 2. \end{cases}$$

Tabulamos $f(-2) = -7$, $f(-1) = 2$, $f(0) = 3$, $f(\sqrt{3}) = 0$, $f(2) = 1$.

Por lo que la gráfica de $f(x)$ es:



y de aquí

Dominio: $D_f = \mathbb{R}$.

Rango: $R_f = (-\infty, -2) \cup [0, 3]$.

Raíz: $x = \sqrt{3}$.

□

(4) Si $f(x) = \sqrt{4-x}$ & $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$,

(a) Obtenga, reduciendo a su mínima expresión, $\left(\frac{f-g}{f^2}\right)(x)$, así como $(g \circ f)(x)$

▼ Calculamos

$$\begin{aligned}\left(\frac{f-g}{f^2}\right)(x) &= \frac{f(x)-g(x)}{f^2(x)} = \frac{\sqrt{4-x} - \frac{1}{x^2-1}}{4-x} = \frac{(x^2-1)\sqrt{4-x} - 1}{(4-x)(x^2-1)}; \\ (g \circ f)(x) &= g[f(x)] = g(\sqrt{4-x}) = \frac{1}{4-x-1} = \frac{1}{3-x}.\end{aligned}$$

□

(b) Obtenga los dominios de f , g , $f-g$, $g \circ f$, $\frac{f-g}{f^2}$

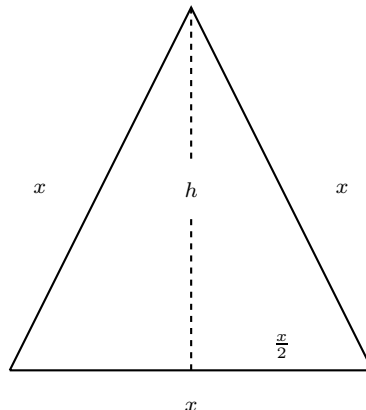
▼ Dominios:

$$\begin{aligned}D_f &= \{x \in \mathbb{R} \mid 4-x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\} = (-\infty, 4]; \\ D_g &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \neq 1\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}; \\ D_{f-g} &= D_f \cap D_g = (-\infty, 4] - \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 4]; \\ D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, 4] \mid \sqrt{4-x} \neq \pm 1\} = \\ &= \{x \in (-\infty, 4] \mid 4-x \neq 1\} = \{x \in (-\infty, 4] \mid x \neq 3\} = \\ &= \{x \in (-\infty, 4] \mid x \neq 3\} = (-\infty, 3) \cup (3, 4]; \\ D_{\frac{f-g}{f^2}} &= D_{f-g} \cap [D_f - \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}] = \\ &= [(-\infty, 4] - \{\pm 1\}] \cap [(-\infty, 4] - \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{4-x} = 0\}] = \\ &= [(-\infty, 4] - \{\pm 1\}] \cap [(-\infty, 4] - \{4\}] = [(-\infty, 4] - \{\pm 1\}] \cap (-\infty, 4) = \\ &= (-\infty, 4) - \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 4).\end{aligned}$$

□

(5) Exprese el área de un triángulo equilátero como función de la longitud de uno de sus lados.

▼ Usamos la figura siguiente:



Por el teorema de Pitágoras, la altura h del triángulo vale

$$h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Por lo que el área del triángulo equilátero es

$$A_{\Delta}(x) = \frac{1}{2}x \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

□

(B) SEGUNDO PARCIAL

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$

▼ Racionalicemos el numerador multiplicando arriba y abajo por $\sqrt{x} + 1$, que es el binomio conjugado del numerador:

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \text{ si } x \neq 1, \text{ luego}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

□

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 + 5}}.$

▼ Observemos que

$$\frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 + 5}} = \frac{x \left(3 + \frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{5}{x^2}\right)}} = \frac{x \left(3 + \frac{4}{x}\right)}{|x| \sqrt{2 + \frac{5}{x^2}}} = \frac{x \left(3 + \frac{4}{x}\right)}{-x \sqrt{2 + \frac{5}{x^2}}},$$

para $x < 0$, como será el caso pues vamos a hacer que x tienda a $-\infty$. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 + 5}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{3 + \frac{4}{x}}{\sqrt{2 + \frac{5}{x^2}}} \right) = -\frac{3 + 0}{\sqrt{2 + 0}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

□

(3) Para la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$, obtener:

(a) Dominio y puntos de intersección con el eje x

▼ Como es una función racional, su dominio es todo \mathbb{R} excepto las raíces del denominador, es decir, los x tales que

$$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Por lo que dominio de f : $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

La gráfica de la función interseca al eje x cuando $f(x) = 0$, esto es, cuando

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

□

□

□

□

□

(b) Intervalos de continuidad

▼ En $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ $f(x)$ es continua, debido a que es una función racional.

(c) Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales

▼ Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow -2^\mp} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^\mp} \frac{x^2 - 1}{(2+x)(2-x)} = \mp \infty.$$

Por lo que la recta $x = -2$ es una asíntota vertical; pero, como la función es par, la recta $x = 2$ también es asíntota vertical. Ahora vemos que

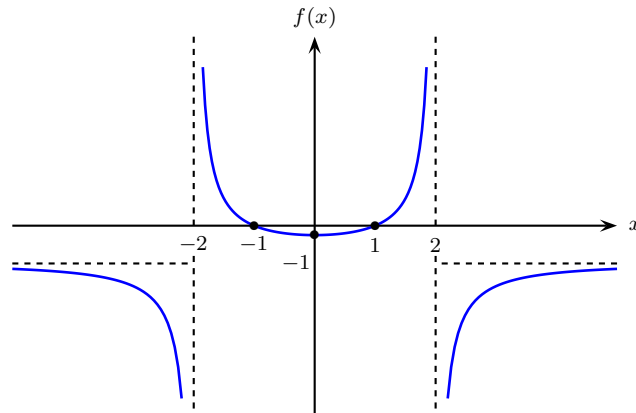
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Por lo que la recta $y = -1$ es asíntota horizontal.

(d) Bosquejo gráfico

▼ Tabulamos $f(0) = -\frac{1}{4}$.

La gráfica de la función $f(x)$ es:

(4) Determine los valores de las constantes c & k que hacen a la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1; \\ cx + k & \text{si } 1 < x < 4; \\ -2x & \text{si } 4 \leq x. \end{cases}$$

continua en todo \mathbb{R} ; dibuje la gráfica de esa función.

▼ Tenemos

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1)$ & $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = c + k$; luego $c + k = 1$, si queremos que f sea continua en $x = 1$.

Análogamente $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 4c + k$ & $f(4) = -8 = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$, por lo que $4c + k = -8$, para que f sea continua en $x = 4$.

Para que f sea continua en \mathbb{R} , habida cuenta que es lineal en $(-\infty, 1]$, $(1, 4)$ y en $[4, +\infty)$, necesitamos solamente que sea continua en $x = 1$ y en $x = 4$, por lo que

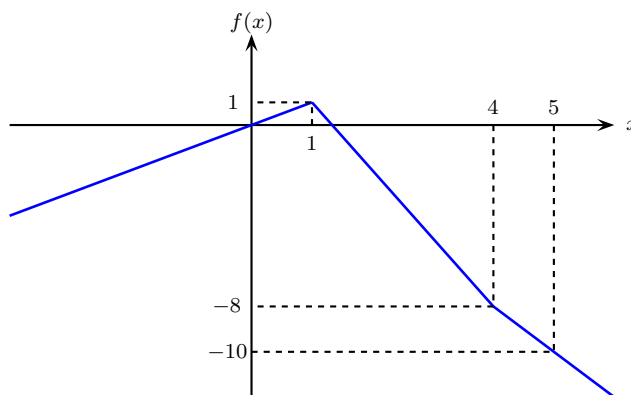
$$\begin{cases} c + k = 1; \\ 4c + k = -8. \end{cases}$$

Resolvamos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, restándole a la segunda la primera:

$$3c = -9 \Rightarrow c = \frac{-9}{3} = -3 \text{ y sustituyendo este valor en la primera: } -3 + k = 1 \Rightarrow k = 4.$$

Tabulamos $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(4) = -8$ & $f(5) = -10$.

La gráfica de la función que resulta es:



□

- (5) Si $H(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$, ¿qué tipo de discontinuidad hay en $x = 0$? ¿Esencial? ¿Removible? Justifique su respuesta.

▼ Calculemos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ racionalizando el denominador, es decir, multiplicando arriba y abajo por el binomio conjugado del denominador, que es $\sqrt{x+1}+1$:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = \sqrt{x+1}+1 \text{ si } x \neq 0.$$

Tenemos entonces que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1) = \sqrt{0+1}+1 = \sqrt{1}+1 = 1+1 = 2.$$

Si definimos $f(0) = 2$, f resultaría continua en 0, por lo que la discontinuidad es removible.

□

(C) TERCER PARCIAL

- (1) Derivar la función $f(x) = \sqrt{(1-x)^2 + \sqrt{x-1}}$.

▼ Puesto que $f(x) = [(1-x)^2 + (x-1)^{1/2}]^{1/2}$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left[(1-x^2) + (x-1)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[2(1-x)(-1) + \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{-2(1-x) + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{(1-x)^2 + \sqrt{x-1}}} = \frac{-4(1-x)\sqrt{x-1} + 1}{4\sqrt{x-1}\sqrt{(1-x)^2 + \sqrt{x-1}}} = \\ &= \frac{4(x-1)\sqrt{x-1} + 1}{4(x-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1-x)^2 + \sqrt{x-1}}} = \frac{4(x-1)^{\frac{3}{2}} + 1}{4(x-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(x-1)^{\frac{1}{2}}\left[(x-1)^{\frac{3}{2}} + 1\right]}} = \\ &= \frac{4(x-1)^{\frac{3}{2}} + 1}{4(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{(x-1)^{\frac{3}{2}} + 1}} = \frac{4(x-1)^{\frac{3}{2}} + 1}{4(x-1)^{\frac{3}{4}}\sqrt{(x-1)^{\frac{3}{2}} + 1}}. \end{aligned}$$

□

(2) Graficar la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, determinando

(a) dominio, raíces y simetría

▼ Como se trata de una función racional, su dominio son los reales menos las raíces del denominador, esto es, las x tales que

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

Tiene una raíz en $x = 0$.

Es impar pues

$$f(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -f(x) \Rightarrow f(x) = -f(-x).$$

□

(b) Asíntotas

▼ Calculamos

$$\lim_{x \rightarrow -1^\mp} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^\mp} \frac{x}{(1+x)(1-x)} = \pm\infty.$$

Por lo que la recta $x = -1$ es una asíntota vertical y, por paridad, la recta $x = 1$ también es asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{0}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Por lo que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

□

(c) Intervalos de monotonía

▼ Calculemos la derivada

$$f'(x) = \frac{(1-x^2)(1) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

La función es creciente en $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y en $(1, +\infty)$ ya que $f'(x) > 0$ para cada $x \neq \pm 1$.

□

(d) Intervalos de concavidad

▼ Calculemos la segunda derivada de $f(x)$

$$\begin{aligned}
 f''(x) = [f'(x)]' &= \frac{(1-x^2)^2(2x) - (1+x^2) \times 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \\
 &= \frac{2x - 2x^3 + 4x + 4x^3}{(1-x^2)^3} = \frac{6x + 2x^3}{(1-x^2)^3} = \\
 &= \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}.
 \end{aligned}$$

El signo de la segunda derivada lo dan los términos x & $1-x^2 = (1-x)(1+x) = -(x-1)(x+1)$. Usamos la tabla que sigue para determinar los intervalos de concavidad:

Intervalo	Signo de			
	$1+x$	x	$-(x-1)$	$f''(x)$
$x < -1$ ($< 0 < 1$)	-	-	+	+
$-1 < x < 0$ (< 1)	+	-	+	-
$(-1 <) 0 < x < 1$	+	+	+	+
$x > 1$ ($> 0 > -1$)	+	+	-	-

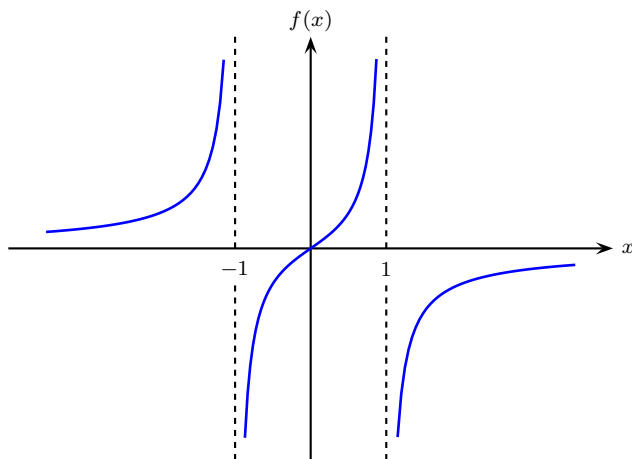
Por lo tanto:

La función $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.La función $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

□

(e) Puntos críticos y su clasificación. Puntos de inflexión

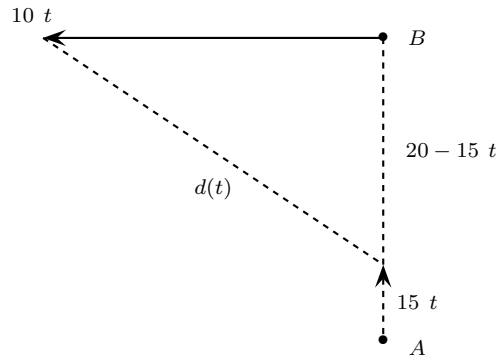
▼ La función $f(x)$ no tiene puntos críticos; en $(0, 0)$ tiene un punto de inflexión ya que ahí su gráfica cambia el sentido de su concavidad (pasa de ser hacia arriba a ser hacia abajo) y además es continua. Y ahora veamos su gráfica:



□

- (3) A las 13:00 horas un barco A se encuentra 20 millas al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 millas/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 millas/h. ¿A qué hora se alcanza la distancia mínima entre las dos embarcaciones?

▼ Usamos la figura siguiente, donde (t) son las horas transcurridas a partir de las 13 : 00 horas:



El espacio que recorre el barco A es $15t$ millas y el recorrido por el barco B es $10t$, por lo que la distancia entre ambos barcos, cuyo mínimo es el que buscamos, según el teorema de Pitágoras es:

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt{(10t)^2 + (20 - 15t)^2} = \\ &= \sqrt{100t^2 + 400 - 600t + 225t^2} = \\ &= \sqrt{325t^2 - 600t + 400}. \end{aligned}$$

El mínimo de esta función coincide con el mínimo de la función

$$[d(t)]^2 = 325t^2 - 600t + 400 = 25(13t^2 - 24t + 16).$$

Por lo que basta con que encontremos el mínimo de la función $g(t) = 13t^2 - 24t + 16$, que por otra parte es el vértice de la parábola $y = g(t)$.

$$g'(t) = 26t - 24 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}.$$

Y como $g''(t) = 26 > 0$, se trata de un mínimo y la mínima distancia se alcanza a las $13 + \frac{12}{13}$ horas. \square

(4) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 3x - 1$ en el punto $(0, -1)$.

▼ A la curva pertenece efectivamente el punto $(0, -1)$ pues sus coordenadas $x = 0$ & $y = -1$ satisfacen la ecuación

$$-1 = 3 \times (0)^2 - 3 \times 0 - 1.$$

La pendiente de cualquier tangente a la parábola $y = 3x^2 - 3x - 1$ está dada por $y'(x) = 6x - 3$ y en el punto $x = 0$ la pendiente es $y'(0) = 6 \times 0 - 3 = 0 - 3 = -3$, por lo que la ecuación de la recta tangente pedida es:

$$y + 1 = -3x \Rightarrow y = -3x - 1.$$

\square