CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E0300

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{1}{4}$.

(2) Dibuje la región (si la hay) definida por el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 4 \le x^2 + y^2 \le 9; \\ |\, x + y \,| \le 1. \end{cases}$$

(3) Considere las funciones

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ 1 & \text{si } x \ge 0; \end{cases}$$

y

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Determine:
El dominio, la gráfica y el rango de la función definida por

$$f(x) = sgn(x) + xU(x).$$

(4) Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$, encuentre dos funciones g para las cuales

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5.$$

(5) Sean f, g & h tres funciones definidas por

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1};\ g(x) = x^2 + 1;\ h(x) = \sqrt{x-2}\,;$$

encuentre una expresión para la función H dada por $H(t) = \left(\dfrac{f \circ g}{h}\right)(t^2 + 2)$.

(6) Un viaje subsidiado por una escuela costará a cada estudiante 150 pesos, si viajan no más de 150 estudiantes; sin embargo, el costo a pagar por estudiante se reduciría en 5 pesos por cada uno más que se inscriba al grupo de los 150. Exprese los ingresos brutos recibidos por la escuela en función del número de inscritos a dicho viaje.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(B) Segundo parcial

(1) Considere

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1; \\ x + 1 & \text{si } x > 1; \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1; \\ 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Calcule $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)g(x)$ & $\lim\limits_{x\to 1} f(x)g(x)$.

(2) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+1}-1}{h}$.

(3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^3+x} - \sqrt{x^3+1}\right)$.

(4) $\lim\limits_{s\to 2^+} \left(\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{3}{s^2-4}\right)$.

(5) Para la función f definida por $f(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, determine:

- (a) Dominio y raíces
- (b) Asíntotas verticales y horizontales
- (c) Bosquejo gráfico

(6) Considere la función g definida por $g\,(x) = (x-1)f\,(x)$ con $0 \leq x \leq 2$, donde $f\,(x)$ es la función máxima entera. Decida, señalando claramente sus argumentos, si g es continua o no en $x = 1$.

(C) Tercer parcial

(1) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 7, & 0 < x \leq b \\ \dfrac{6}{x} & x > b \end{cases}$$

- (a) Determine el valor de b para el cual f es continua
- (b) Indique si f es diferenciable en el(los) valor(es) de b hallado(s) en (a). No se espera una respuesta como si o no, la respuesta debe ir acompañada de argumentos

(2) Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}$

(3) Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = (x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x^2-4)^{\frac{1}{3}}$

(4) Encuentre una ecuación de la recta normal a la curva $x - y = \sqrt{x+y}$ en el punto $(3, 1)$.

(5) Sea la función $f(x) = 1 - (x-3)^3$.
Encuentre los extremos relativos y absolutos (si tiene), los intervalos donde sea creciente y donde sea decreciente, también calcule dónde es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo. Finalmente haga la gráfica.

(6) Un ganadero desea cercar un prado rectangular junto a un río. El prado ha de tener $180\,000$ m^2 para proporcionar suficiente pasto.¿Qué dimensiones debe tener para que requiera la menor cantidad de cerca posible, teniendo en cuenta que no hay que cercar en el lado que da al río?

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{1}{4}$.

▼ La desigualdad es equivalente a

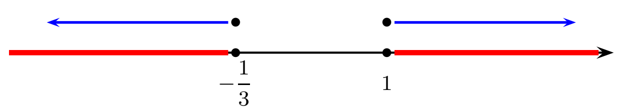
$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \frac{4x - x + 1}{4(x-1)} > 0 \Rightarrow \frac{3x+1}{4(x-1)} > 0.$$

Ésta se cumple si

$$\begin{array}{llll}
3x+1>0 & \& \ 4(x-1)>0 & \text{o bien} & 3x+1<0 & \& \ 4(x-1)<0; \\
3x>-1 & \& \ x-1>0 & \text{o bien} & 3x<-1 & \& \ x-1<0; \\
x>-\dfrac{1}{3} & \& \ x>1 & \text{o bien} & x<-\dfrac{1}{3} & \& \ x<1; \\
x>1 & & \text{o bien} & x<-\dfrac{1}{3}\,. &
\end{array}$$

Luego, el conjunto solución es

$$CS = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \bigcup (1, +\infty) = \mathbb{R} - \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$$



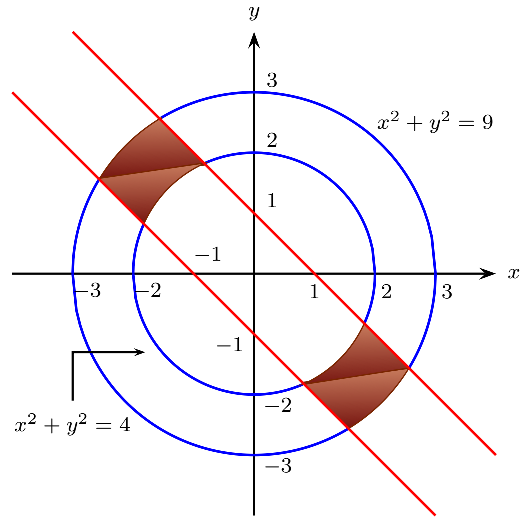
□

(2) Dibuje la región (si la hay) definida por el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9; \\ |\, x + y \,| \leq 1. \end{cases}$$

▼ Observemos que $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3$ y que la distancia de un punto $P(x, y)$ al origen $O\,(0, 0)$ es precisamente $d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$; luego, los puntos que satisfacen esa desigualdad son los de la corona circular determinada por las circunferencias con centro en el origen y radios 2 y 3.

La desigualdad $|\, x + y \,| \leq 1$ equivale al sistema de desigualdades $-1 \leq x + y \leq 1$ y éste al $-x - 1 \leq y \leq -x + 1$; luego, los puntos que satisfacen a la desigualdad original son los que están "abajo" de la recta $y = -x + 1$ y "encima" de la recta $y = -x - 1$. En resumidas cuentas la región definida por el sistema de desigualdades propuestas es la que corresponde a la siguiente figura:



□

(3) Considere las funciones

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ 1 & \text{si } x \geq 0; \end{cases}$$

y

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

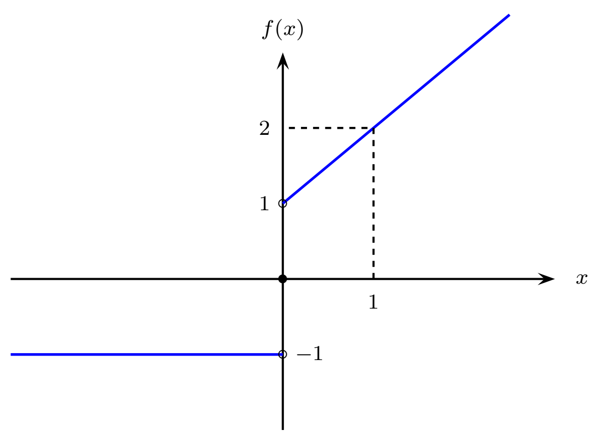
Determine:
El dominio, la gráfica y el rango de la función definida por

$$f(x) = sgn(x) + xU(x).$$

▼ Dominio: como $D_{sgn(x)} = D_x = D_{U(x)} = \mathbb{R}$, tenemos que $D_f = \mathbb{R}$; entonces,

$$f(x) = \begin{cases} -1 + x \times 0 & \text{si } x < 0; \\ 0 + 0 \times 1 & \text{si } x = 0; \\ 1 + x \times 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ 1 + x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Luego, la gráfica de $f(x)$ es:



El rango: $R_f = \{-1, 0\} \bigcup (1, +\infty)$.

$\square$

(4) Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$, encuentre dos funciones g para las cuales

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5.$$

▼ Tenemos que

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = x^2 - 4x + 5$$

y también que

$$f[g(x)] = [g(x)]^2 + 2g(x) + 2;$$

luego entonces:

$$\begin{aligned} [g(x)]^2 + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5 \Leftrightarrow [g(x)]^2 + 2g(x) - x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-x^2 + 4x - 3)}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + x^2 - 4x + 3} = \\ &= -1 \pm \sqrt{x^2 - 4x + 4} = -1 \pm \sqrt{(x-2)^2} = \\ &= -1 \pm |\, x - 2 \,| = \begin{cases} -1 \pm (x - 2) & \text{si } x \geq 2; \\ -1 \pm (-x + 2) & \text{si } x < 2; \end{cases} \end{aligned}$$

también:

$$g_1(x) = \begin{cases} -1 + (x - 2) & \text{si } x \geq 2; \\ -1 + (-x + 2) & \text{si } x < 2; \end{cases} = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 2; \\ -x + 1 & \text{si } x < 2; \end{cases}$$

y

$$g_2(x) = \begin{cases} -1 - (x - 2) & \text{si } x \geq 2; \\ -1 - (-x + 2) & \text{si } x < 2; \end{cases} = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \geq 2; \\ x - 3 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

$\square$

(5) Sean f, g & h tres funciones definidas por

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1};\ g(x) = x^2 + 1;\ h(x) = \sqrt{x-2}\,;$$

encuentre una expresión para la función H dada por $H(t) = \left(\dfrac{f \circ g}{h}\right)(t^2 + 2)$.

▼ Vemos que

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t^2 + 2) = f[g(t^2 + 2)] = f[(t^2 + 2)^2 + 1] = f(t^4 + 4t^2 + 5) = \\ = \frac{t^4 + 4t^2 + 5 + 1}{t^4 + 4t^2 + 5 - 1} = \frac{t^4 + 4t^2 + 6}{t^4 + 4t^2 + 4} \end{aligned}$$

y que

$$h(t^2 + 2) = \sqrt{t^2 + 2 - 2} = \sqrt{t^2} = |\, t \,|\,.$$

Luego entonces,

$$H(t) = \frac{(f \circ g)(t^2+2)}{h(t^2+2)} = \frac{t^4+4t^2+6}{|\,t\,|\,(t^4+4t^2+4)}.$$

□

(6) Un viaje subsidiado por una escuela costará a cada estudiante 150 pesos, si viajan no más de 150 estudiantes; sin embargo, el costo a pagar por estudiante se reduciría en 5 pesos por cada uno más que se inscriba al grupo de los 150. Exprese los ingresos brutos recibidos por la escuela en función del número de inscritos a dicho viaje.

▼ Si I es el ingreso bruto y n el número de estudiantes que van a viajar, tenemos:

$$I(n) = \begin{cases} 150n & \text{si } n \le 150 \\ [150 - 5(n-150)]n & \text{si } n > 150 \end{cases} = \begin{cases} 150n & \text{si } n \le 150; \\ (150 - 5n + 750)n & \text{si } n > 150; \end{cases}$$

$$I(n) = \begin{cases} 150n & \text{si } n \le 150 \\ (900 - 5n)n & \text{si } n > 150 \end{cases} = \begin{cases} 150n & \text{si } n \le 150; \\ (180 - n)5n & \text{si } n > 150. \end{cases}$$

Como se ve, no se podrían aceptar más de 180 estudiantes, pues si $n > 180 \Rightarrow 180 - n < 0$, los ingresos serían negativos.

□

(B) Segundo parcial

(1) Considere

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{si } x \le 1; \\ x+1 & \text{si } x > 1; \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1; \\ 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Calcule $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)g(x)$ & $\lim\limits_{x\to 1} f(x)g(x)$.

▼ Tenemos:

$$\lim_{x\to 1^-}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to 1^-} f(x) \times \lim_{x\to 1^-} g(x) = 4 \times 1 = 4 \text{ (ya que ambos límites existen);}$$
$$\lim_{x\to 1^+}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to 1^+} f(x) \times \lim_{x\to 1^+} g(x) = 2 \times 2 = 4;$$
$$\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)] = 4, \text{ pues } \lim_{x\to 1^-}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to 1^+}[f(x)g(x)] = 4.$$

□

(2) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+1}-1}{h}$.

▼ Vemos que, al racionalizar:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h+1}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h+1-1}{h(\sqrt{h+1}+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

□

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+1}\right)$.

▼ No tiene sentido, pues

$$D_{\sqrt{x^3+x}}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^3+x\geq 0\}$$

y

$$x^3+x=x(x^2+1)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0.$$

Luego, no podemos tomar valores de x negativos como es el caso si $x\to-\infty$.
Ocurre algo análogo con la función $\sqrt{x^3+1}$, pues su dominio son los reales x tales que $x^3+1\geq 0$, es decir, aquellos que $x^3\geq -1$; luego, $x\geq -1$ por lo que x no puede tomar valores menores que -1.

□

(4) $\displaystyle\lim_{s\to 2^+}\left(\frac{1}{s-2}-\frac{3}{s^2-4}\right)$.

▼ Efectuamos primero la operación:

$$\frac{1}{s-2}-\frac{3}{s^2-4}=\frac{s+2-3}{(s+2)(s-2)}=\frac{s-1}{s^2-4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{s\to 2^+}\left(\frac{1}{s-2}-\frac{3}{s^2-4}\right)=\lim_{s\to 2^+}\frac{s-1}{(s+2)(s-2)}=+\infty.$$

Puesto que $s-1\to 1>0$, $s+2\to 4>0$ & $s-2\to 0^+$, cuando $s\to 2^+$, entonces, $(s+2)(s-2)\to 0^+$, cuando $s\to 2^+$.

□

(5) Para la función f, definida por $f(x)=\dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, determine:

(a) Dominio y raíces

▼ Dominio:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-4>0\}=(-\infty,-2)\bigcup(2,+\infty).$$

Pues $x^2-4=(x+2)(x-2)>0\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{llllll} x+2>0 & \& \ x-2>0 & \text{o bien} & x+2<0 & \& \ x-2<0; \\ x>-2 & \& \ x>2 & \text{o bien} & x<-2 & \& \ x<2; \\ x>2 & & \text{o bien} & x<-2; & \\ x\in(2,+\infty) & & \text{o bien} & x\in(-\infty,-2). & \end{array}$$

Raíz sería $x=0$ pero, como $0\notin D_f$, entonces f no tiene raíces.

□

(b) Asíntotas verticales y horizontales

▼ $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}}=+\infty\Rightarrow x=2$ es una asíntota vertical.
Como $f(x)$ es par $\Rightarrow x=-2$, también es asíntota vertical.
Como

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{\frac{1}{x^2}\sqrt{x^2-4}}=$$

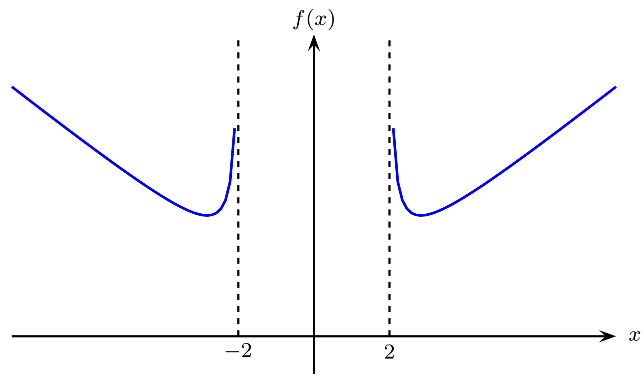
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^4}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^4}}}=+\infty,$$

no tiene asíntotas horizontales.

□

(c) Bosquejo gráfico

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:



□

(6) Considere la función g definida por $g(x) = (x-1)f(x)$ con $0 \le x \le 2$, donde $f(x)$ es la función máxima entera. Decida, señalando claramente sus argumentos, si g es continua o no en $x = 1$.

▼ Por un lado tenemos que $g(1) = (1-1)f(1) = 0$ y que

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} [(x-1)f(x)] = \lim_{x\to 1^-} (x-1) \times \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \times 0 = 0 \text{ y también que}$$
$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1) \times \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \times 1 = 0.$$

Luego, $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0 = g(1)$ por lo que $g(x)$ es continua en $x = 1$.

□

(C) Tercer parcial

(1) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 7, & 0 < x \le b; \\ \dfrac{6}{x} & x > b. \end{cases}$$

(a) Determine el valor de b para el cual f es continua

▼ Por un lado $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = b^2 - 7 (= f(b))$ y por otro $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = \dfrac{6}{b}$.

Luego, para que f sea continua, debe existir $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, por lo que los límites laterales deben ser iguales, esto es,

$$b^2 - 7 = \frac{6}{b} \Leftrightarrow b(b^2 - 7) = 6 \Leftrightarrow b^3 - 7b - 6 = 0.$$

Luego $b=-1$ es una raíz (por inspección), por lo que b^3-7b-6 es divisible entre $b+1$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & b^2-b-6 \\
\hline
b+1 & b^3 \qquad -7b-6 \\
 & \underline{-b^3-b^2} \\
 & \quad -b^2-7b-6 \\
 & \quad \underline{+b^2+b} \\
 & \qquad -6b-6 \\
 & \qquad \underline{6b+6} \\
 & \qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

Tenemos, por esto

$$b^3-7b-6=(b+1)(b^2-b-6).$$

Además $b^2-b-6=0 \Leftrightarrow (b-3)(b+2)=0$, esto es, si $b=-2$ o bien si $b=3$.

Por lo que finalmente $f(x)$ sería continua si $b=-2$, -1 o bien si $b=3$, pero, como $f(x)$ está definida solamente en valores positivos, $f(x)$ es continua si $b=3$.

□

(b) Indique si f es diferenciable en el (los) valor(es) de b hallado(s) en (a). No se espera una respuesta como si o no, la respuesta debe ir acompañada de argumentos.

▼ Calculamos

$$f'(b^-)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{x^2-7-b^2+7}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{(x+b)\,(x-b)}{x-b}=2b$$

y también

$$f'(b^+)=\lim_{x\to b^+}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^+}\frac{\frac{6}{x}-\frac{6}{b}}{x-b}=\lim_{x\to b^+}\frac{6(b-x)}{bx(x-b)}=-\lim_{x\to b^+}\frac{6}{bx}=-\frac{6}{b^2}\,.$$

Como f es diferenciable si y sólo si las dos derivadas laterales son iguales, esto es si $2b=-\dfrac{6}{b^2}\Leftrightarrow b^3=-3$, que no es el caso, entonces $f(x)$ no es derivable en $x=3$.

□

(2) Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ si $y=\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

▼ Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
y&=(x-\sqrt{x^2-1})^{-1}\Rightarrow\\
\Rightarrow y'&=\frac{-\left(1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)}{(x-\sqrt{x^2-1})^2}=\frac{-(\sqrt{x^2-1}-x)}{\sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{x^2-1})^2}=\\
&=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{x^2-1})^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{x^2-1})}=\\
&=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}-x^2+1}\,.
\end{aligned}
$$

(3) Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = (x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x^2-4)^{\frac{1}{3}}$

▼ Derivamos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x^2-4)^{\frac{1}{3}}}{2\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}\,2x}{3(x^2-4)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3x(x^2-4)+2x(x^2-1)}{3\sqrt{x^2-1}(x^2-4)^{\frac{2}{3}}} =$$
$$= \frac{3x^3-12x+2x^3-2x}{3\sqrt{x^2-1}(x^2-4)^{\frac{2}{3}}} = \frac{5x^3-14x}{3\sqrt{x^2-1}(x^2-4)^{\frac{2}{3}}}\,.$$

□

(4) Encuentre una ecuación de la recta normal a la curva $x-y=\sqrt{x+y}$ en el punto $(3,1)$.

▼ Efectivamente el punto $(3,1)$ pertenece a la curva pues sus coordenadas satisfacen a la ecuación, ya que $3-1=\sqrt{3+1} \Rightarrow 2=2$.
Calculamos entonces la pendiente de la tangente a la curva en el punto, derivando implícitamente

$$1-y' = \frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 = y' + \frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{y'}{2\sqrt{x+y}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2\sqrt{x+y}} = y'\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x+y}-1}{2\sqrt{x+y}} = y'\frac{2\sqrt{x+y}+1}{2\sqrt{x+y}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y' = \frac{2\sqrt{x+y}-1}{2\sqrt{x+y}+1}\,.$$

En el punto $(3,1)$ la pendiente es

$$y'(3,1) = \frac{2\sqrt{3+1}-1}{2\sqrt{3+1}+1} = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$$

y la pendiente de la normal es $-\dfrac{5}{3}$.
La ecuación de la normal pedida es

$$y-1 = -\frac{5}{3}(x-3) \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}x+6.$$

□

(5) Sea la función $f(x) = 1-(x-3)^3$.
Encuentre los extremos relativos y absolutos (si tiene), los intervalos donde sea creciente y donde sea decreciente, también calcule dónde es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo. Finalmente haga la gráfica.

▼ La función $f(x)$ es un polinomio

$$f(x) = 1-(x^3-9x^2+27x-27) = -x^3+9x^2-27x+28.$$

Calculamos sus puntos críticos

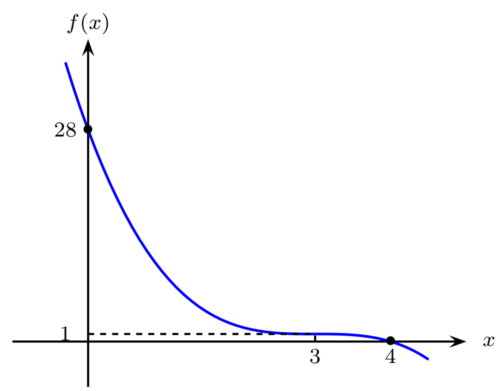
$$f'(x) = -3x^2 + 18x - 27 = -3(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ que es el único punto crítico.}$$

Como $f'(x) = -3(x - 3)^2 < 0$ si $x \neq 3$, la función $f(x)$ es decreciente en $\mathbb{R}$ y no tiene valores extremos.

Analicemos su concavidad

$$f''(x) = -6(x - 3) \begin{cases} > 0, \\ < 0, \end{cases} \quad \text{si} \begin{cases} x < 3; \\ x > 3. \end{cases}$$

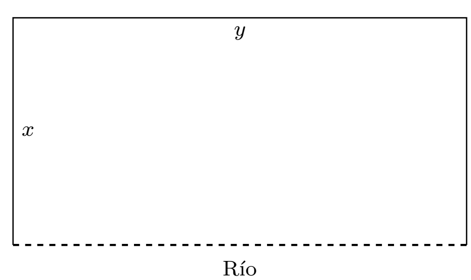
Luego $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 3)$ y cóncava hacia abajo en $(3, +\infty)$.
En $x = 3$ hay un punto de inflexión que es $(3, 1)$.
La gráfica de $f(x)$ es:



□

(6) Un ganadero desea cercar un prado rectangular junto a un río. El prado ha de tener $180\,000$ m^2 para proporcionar suficiente pasto.¿Qué dimensiones debe tener para que requiera la menor cantidad de cerca posible, teniendo en cuenta que no hay que cercar en el lado que da al río?

▼ Dibujamos el prado:



El área del prado es:

$$A = xy = 180\,000 \text{ m}^2.$$

El perímetro que queremos minimizar es

$$P = 2x + y.$$

Despejando y de la expresión del área:

$$y = \frac{180\,000}{x}$$

y sustituyendo en la expresión del perímetro, tenemos una función de una sola variable:

$$P(x) = 2x + \frac{180\,000}{x}\,.$$

Sus puntos críticos se hallan cuando $P'(x) = 0$, es decir,

$$2 - \frac{180\,000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{180\,000}{2} = 90\,000 \Leftrightarrow x \pm 300 \text{ m}.$$

Desechamos $x = -300$
Como

$$P''(x) = 2\frac{180\,000}{x^3} = \frac{360\,000}{x^3}\,.$$

vemos que

$$P''(300) > 0.$$

Luego para $x = 300$ m & $y = 600$ m tenemos la menor cantidad de cerca posible.

$\square$