CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
GLOBAL E1400

(A) Primer parcial

(1) Un supermercado se encuentra con grandes existencias de manzanas que debe vender rápidamente. El gerente sabe que si las manzanas se ofrecen a p pesos cada kg, vendería x kg, con $x = 1\,000 - 20\,p$.
¿Qué precio p deberá fijar para obtener ingresos de por lo menos $12 000?

(2) Un cordel de 10 m de largo es cortado en dos partes; una parte se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Si x es la longitud del lado del triángulo, exprese la suma de áreas del cuadrado y del triángulo (área total encerrada) en función de x.

(3) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ & $g(x) = \dfrac{2}{x^2 - 3}$,
obtener: $(fg)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y sus respectivos dominios.

(4) Sea f la función dada por $f(t) = t^2$ con $0 \leq t \leq 1$.
Sea g la función definida por

$$g(t) = \begin{cases} -f(-t) & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(a) Hacer un bosquejo de la gráfica de g indicando su imagen
(b) Si $h(t) = 2g(t - 1) + 3$, hacer un bosquejo de la gráfica de esta nueva función e indicar su dominio e imagen

(B) Segundo parcial

(1) Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6x}{x^2 + 5x + 6}$,
determinar: dominio y raíces; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; dibujar la gráfica.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x} - \sqrt{4x^2 - 2}\right)$.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 1}{x^4 + 3} & \text{si } x < -1; \\ \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 6x + 5} & \text{si } x > -1. \end{cases}$

(4) Una legislación estatal sobre impuestos establece un impuesto exigible de 12% sobre los primeros $20 000 de ganancias gravables y de 16% sobre el resto de las ganancias.
Calcular los valores de las constantes A y B para que la función de impuestos $T(x)$ sea continua para todo x.

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ A + 0.12x & \text{si } 0 < x \leq 20\,000; \\ B + 0.16(x - 20,000) & \text{si } x > 20\,000. \end{cases}$$

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

(5) Dar un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$ que cumpla los requisitos siguientes:
Es continua en los intervalos $(-\infty,-2)$, $[-2,1)$, $[1,3]$ y en $(3,+\infty)$; y además:

$$\begin{array}{lll}
\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3; & \lim_{x\to-4} f(x) = 0; & \lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty; \\
\lim_{x\to-2^+} f(x) = 0; & \lim_{x\to 0} f(x) = -3; & \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty; \\
\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2; & \lim_{x\to 3^-} f(x) = 4; & \lim_{x\to 3^+} f(x) = -1. \\
\lim_{x\to 5} f(x) = 0; & \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2; &
\end{array}$$

(C) Tercer parcial

(1) Dada la función definida por $f(x) = (4-x)x^{1/3}$,
obtener: intervalos de crecimiento y de decrecimiento; puntos críticos y su clasificación; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.

(2) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva

$$x^2y^2 = (y+1)^2(4-y^2)$$

en el punto $(0,-2)$.

(3) En un concurso de resistencia, los concursantes están 2 millas mar adentro y tienen que llegar a un sitio en la orilla (tierra firme) que está a 5 millas al oeste (la orilla va de este a oeste). Suponiendo que un concursante puede nadar a 4 millas por hora y correr a 10 millas por hora, ¿hacia qué punto de la orilla debe nadar para minimizar el tiempo total de recorrido?

(4) Un derrame de petróleo adopta una forma circular y tiene un espesor de $\dfrac{1}{50}$ pie. Si el petróleo se está escapando a razón de 40 pies^3/min, ¿a qué razón está aumentando el radio de la mancha de petróleo cuando el radio es de 50 pies?

Respuestas

(A) Primer parcial

(1) Un supermercado se encuentra con grandes existencias de manzanas que debe vender rápidamente. El gerente sabe que si las manzanas se ofrecen a p pesos cada kg, vendería x kg, con $x = 1\,000 - 20\,p$. ¿Qué precio p deberá fijar para obtener ingresos de por lo menos \$12 000?

▼ Si ofreciendo a p pesos cada kilogramo de manzanas, se venden $x = 1\,000 - 20\,p$ kilogramos, entonces el ingreso I por la venta total es

$$I = xp = (1\,000 - 20\,p)p = 1\,000\,p - 20\,p^2,$$

es decir, $I(p) = 1\,000\,p - 20\,p^2$ pesos.
Ahora bien, para que $I(p)$ sea por lo menos \$12 000 debe suceder que

$$I(p) \geq 12\,000 \Leftrightarrow 1\,000\,p - 20\,p^2 \geq 12\,000 \Leftrightarrow 12\,000 - 1\,000p + 20\,p^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20(p^2 - 50\,p + 600) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p^2 - 50\,p + 600 \leq 0.$$

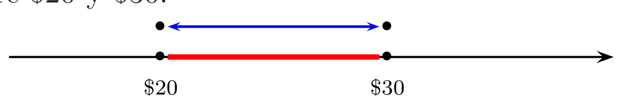
Resolvemos primero la igualdad $p^2 - 50p + 600 = 0$.

$$p = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(600)}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2\,500 - 2\,400}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{50 \pm 10}{2}.$$

De donde $p_1 = \dfrac{50 - 10}{2} = \dfrac{40}{2} = 20$ y $p_2 = \dfrac{50 + 10}{2} = \dfrac{60}{2} = 30$.
Considerando que $p \geq 0$, analizamos los intervalos $(0, 20)$, $(20, 30)$ y $(30, +\infty)$.

Intervalo	Valor de prueba	$p^2 - 50p + 600$
$0 < p < 20$	$p = 10$	$200 > 0$
$20 < p < 30$	$p = 25$	$-25 < 0$
$30 < p$	$p = 40$	$200 > 0$

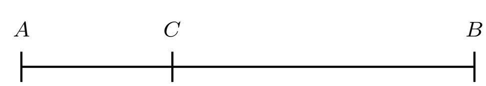
Luego entonces, la desigualdad $p^2 - 50p + 600 \leq 0$ se cumple cuando $20 \leq p \leq 30$; es decir, cuando el precio p por kg está entre \$20 y \$30.



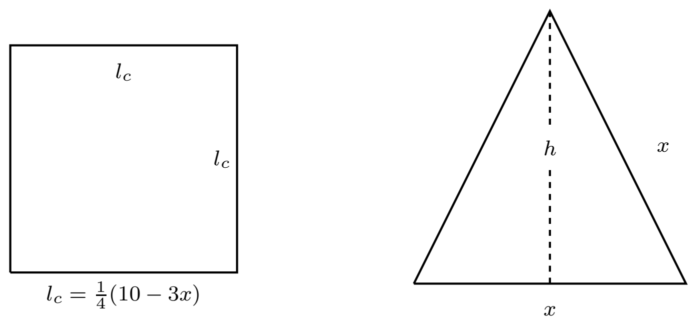
□

(2) Un cordel de 10 m de largo es cortado en dos partes; una parte se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Si x es la longitud del lado del triángulo, exprese la suma de áreas del cuadrado y del triángulo (área total encerrada) en función de x.

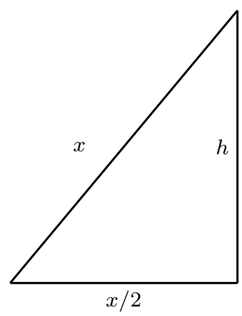
▼ Consideramos la figura siguiente



Si el punto C es donde cortamos el cordel $\overline{AB}$ en 2 pedazos, entonces $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB} = 10$.
Si con el pedazo $\overline{AC}$ formamos un triángulo equilátero con lados de longitud x, entonces $\overline{AC} = 3x$. De lo cual se desprende que $\overline{CB} = 10 - 3x$.
Con el pedazo $\overline{CB}$ formamos un cuadrado con lados de longitud $l_c = \dfrac{1}{4}(10 - 3x)$.
Las figuras correspondientes son



Calculamos la altura h del triángulo equilátero, mediante el teorema de Pitágoras.



Tenemos:

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}x^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

El área del triángulo es

$$A_t = \frac{xh}{2} = \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

El área del cuadrado es

$$A_c = {l_c}^2 = \left[\frac{1}{4}(10 - 3x)\right]^2 = \frac{1}{16}(10 - 3x)^2.$$

El área total de los 2 polígonos es

$$A = A_t + A_c = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{1}{16}(10 - 3x)^2.$$

Es decir,

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{1}{16}(10 - 3x)^2,$$

que es la función deseada.

□

(3) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ & $g(x) = \dfrac{2}{x^2 - 3}$,
obtener: $(fg)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y sus respectivos dominios.

▼ Vemos que

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{4 - x^2}\left(\frac{2}{x^2 - 3}\right) = \frac{2\sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 3}\,.$$

El dominio de la función fg es

$$D_{fg} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{2\sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 3} \in \mathbb{R} \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 4 - x^2 \geq 0 \,\&\, x^2 - 3 \neq 0 \,\right\} =$$
$$= D_f \bigcap D_g = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 4 - x^2 \geq 0 \,\right\} \bigcap \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 3 \neq 0 \,\right\} =$$
$$= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 \leq 4 \,\&\, x^2 \neq 3 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |\, x \,|^2 \leq 2^2 \,\&\, x^2 \neq 3 \,\right\} =$$
$$= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |\, x \,| \leq 2 \,\&\, x \neq \pm\sqrt{3} \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -2 \leq x \leq 2 \,\&\, x \neq \pm\sqrt{3} \,\right\} =$$
$$= [-2, 2] - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\};$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{4 - x^2}) = \frac{2}{(\sqrt{4 - x^2})^2 - 3} = \frac{2}{4 - x^2 - 3} = \frac{2}{1 - x^2}\,.$$

El dominio de la función $g \circ f$ es

$$D_{g\circ f} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in D_f \,\&\, f(x) \in D_g \,\right\} =$$
$$= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in [-2, 2] \;\&\; \sqrt{4 - x^2} \neq \pm\sqrt{3} \,\right\} = \left\{\, x \in [-2, 2] \;\middle|\; 4 - x^2 \neq 3 \,\right\} =$$
$$= \left\{\, x \in [-2, 2] \;\middle|\; x^2 \neq 1 \,\right\} = \left\{\, x \in [-2, 2] \;\middle|\; \pm 1 \,\right\} =$$
$$= [-2, 2] - \{\, -1, 1 \,\}\,.$$

□

(4) Sea f la función dada por $f(t) = t^2$ con $0 \leq t \leq 1$.
Sea g la función definida por

$$g(t) = \begin{cases} -f(-t) & \text{si } -1 \leq t \leq 0; \\ f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(a) Hallar el dominio de g y hacer un bosquejo de la gráfica de g indicando su imagen
▼ El dominio de g es $D_g = [-1, 1]$.
Para bosquejar la gráfica de la función g, es necesario ver cómo expresar

$$g(t) = -f(-t) \text{ para } -1 \leq t \leq 0.$$

Ya que

$$-1 \leq t \leq 0 \Rightarrow (-1)(-1) \geq (-1)t \geq (-1)0 \Rightarrow 1 \geq -t \geq 0 \Rightarrow 0 \leq -t \leq 1.$$

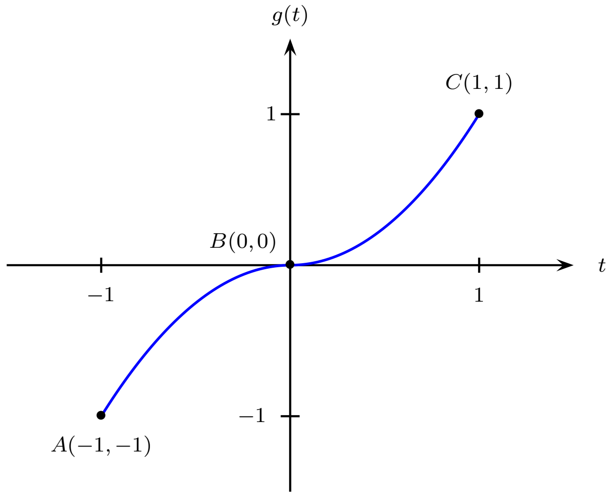
Entonces

$$f(-t) = (-t)^2 = t^2 \,\&\, g(t) = -f(-t) = -t^2.$$

Por lo tanto, la función g puede expresarse como

$$g(t) = \begin{cases} -t^2 & \text{si } -1 \leq t \leq 0; \\ t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Cuya gráfica es



El rango o imagen de g es $R_g = [-1, 1]$.

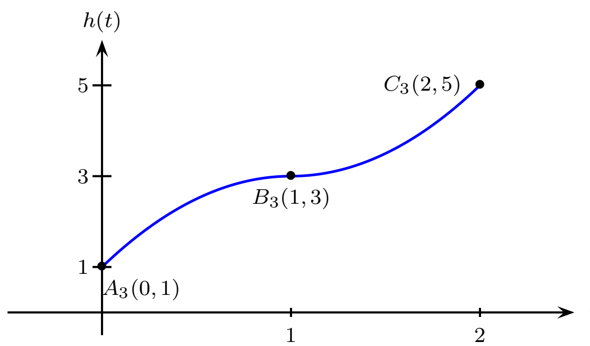
□

(b) Si $h(t) = 2g(t-1) + 3$, hacer un bosquejo de la gráfica de esta nueva función e indicar su dominio e imagen

▼ Para bosquejar la gráfica de la función $h(t) = 2g(t-1) + 3$, obtendremos las nuevas coordenadas de los puntos $A(-1,-1)$, $B(0,0)$ y $C(1,1)$ de la gráfica de g, a medida que se efectúen las acciones indicadas.

$y = g(t)$	$y = g(t-1)$	$y = 2g(t-1)$	$y = 2g(t-1) + 3$
$A(-1,-1)$	$A'(0,-1)$	$A''(0,-2)$	$A'''(0,1)$
$B(0,0)$	$B'(1,0)$	$B''(1,0)$	$B'''(1,3)$
$C(1,1)$	$C'(2,1)$	$C''(2,2)$	$C'''(2,5)$

La gráfica de la función $h(t)$ resulta



□

(B) Segundo parcial

(1) Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6x}{x^2 + 5x + 6}$,
determinar: dominio y raíces; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; dibujar la gráfica.

▼ Dominio de $f(x)$.

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{2x^2 + 6x}{x^2 + 5x + 6} \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + 5x + 6 \neq 0 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x^2 + 5x + 6 = 0 \right\}.$$

Pero como

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \text{ o bien } x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ o bien } x = -2,$$

entonces $D_f = \mathbb{R} - \{ -3, -2 \}$.

Raíces:
Para que $f(x) = 0$, es necesario que

$$2x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ o bien } x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = -3.$$

Aparentemente, $x = 0$ & $x = -3$ son raíces de f, pero debido a que $x = -3 \notin D_f$, entonces f tiene sólo una raíz que es $x = 0$.

Intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades.

Por ser una función racional, f es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{-3, -2\}$.
Es decir, f es continua en el conjunto $(-\infty, -3) \bigcup (-3, -2) \bigcup (-2, +\infty)$.
Entonces f tiene discontinuidades en $x = -3$ y en $x = -2$.
Veamos qué tipo de discontinuidades son:

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 6x}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \to -3} \frac{2x(x + 3)}{(x + 3)(x + 2)} =$$
$$= \lim_{x \to -3} \frac{2x}{x + 2} = \frac{2(-3)}{-3 + 2} = \frac{-6}{-1} = 6.$$

Entonces, $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 6$, lo que implica que $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ existe, por lo cual la discontinuidad que f tiene en $x = -3$ es removible o evitable.

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{2x}{x + 2} = \text{“}\left(\frac{-4}{0} \right)\text{”}.$$

Cuando $x \to -2$, sucede que $x + 2 \to 0$ y que $2x \to -4$, por lo cual $\dfrac{2x}{x + 2} \to \infty$.
Entonces, $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ no existe, por lo que la discontinuidad es esencial y además infinita.

Asíntotas verticales y horizontales.

Una posible asíntota vertical es la recta $x = -2$, por lo cual precisaremos los límites laterales $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$.

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{2x}{x + 2} = \text{“}\left(\frac{-4}{0^-} \right)\text{”}.$$

Si $x \to -2^-$, entonces $\begin{cases} x < -2 & \Rightarrow x + 2 < 0 \\ 2x \to -4 & \Rightarrow 2x < 0 \end{cases}$ por lo que $\dfrac{2x}{x + 2} > 0$ y, por lo mismo, $\dfrac{2x}{x + 2} \to +\infty$, luego entonces,

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty;$$

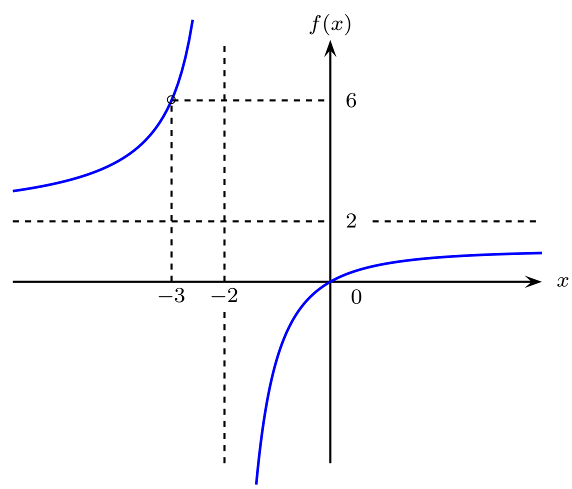
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{2x}{x+2} = \text{“}\left(\frac{-4}{0^+}\right)\text{”}.$$

Si $x \to -2^+$, entonces, $\begin{cases} x > -2 & \Rightarrow x + 2 > 0; \\ 2x \to -4 & \Rightarrow 2x < 0. \end{cases}$

Por lo que $\dfrac{2x}{x+2} < 0$ y por lo mismo $\dfrac{2x}{x+2} \to -\infty$, luego entonces, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$.
Con lo cual, podemos afirmar que la recta $x = -2$ es una asíntota vertical y además la única.
Para determinar las asíntotas horizontales, calculamos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ & $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(2)}{x\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)} =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{1 + \dfrac{2}{x}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Luego entonces, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.
Por lo tanto, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.
Además es la única, ya que de igual manera se puede verificar que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Un esbozo de la gráfica de $f(x)$ es



□

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - \sqrt{4x^2 - 2})$.

▼ Notemos que cuando $x \to +\infty$, sucede que

$$\sqrt{4x^2 + x} \to +\infty, \sqrt{4x^2 - 2} \to +\infty \ \&$$
$$(\sqrt{4x^2 + x} - \sqrt{4x^2 - 2}) \to \text{“}(+\infty - \infty)\text{”}.$$

Por esto procedemos de la siguiente manera:

$$\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-2}=\frac{\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-2}}{1}\,\frac{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}}=$$
$$=\frac{(\sqrt{4x^2+x})^2-(\sqrt{4x^2-2})^2}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}}=\frac{(4x^2+x)-(4x^2-2)}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}}=$$
$$=\frac{4x^2+x-4x^2+2}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}}=\frac{x+2}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-2})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(4-\dfrac{2}{x^2}\right)}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{x^2}\sqrt{4-\dfrac{2}{x^2}}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+|\,x\,|\sqrt{4-\dfrac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{4-\dfrac{2}{x^2}}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{4-\dfrac{2}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}\,.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-2})=\frac{1}{4}\,.$$

□

(3) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+1}{x^4+3} & \text{si } x<-1;\\ \dfrac{x^3+1}{x^2+6x+5} & \text{si } x>-1.\end{cases}$

▼ Debido a que $f(x)$ está definida de diferente manera cuando $x<-1$ y cuando $x>-1$, para calcular $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ procederemos a determinar los límites laterales.

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+1}{x^4+3}=\frac{2(-1)^2+1}{(-1)^4+3}=\frac{2+1}{1+3}=\frac{3}{4}\,.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{3}{4};$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+6x+5} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+5)} =$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+1}{x+5} = \frac{(-1)^2-(-1)+1}{-1+5} = \frac{1+1+1}{4} = \frac{3}{4}\,.$$

Y también

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{3}{4}\,.$$

Ya que $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{3}{4}$ & $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{3}{4}$, entonces los límites laterales son iguales, por lo cual

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{3}{4}\,.$$

□

(4) Una legislación estatal sobre impuestos establece un impuesto exigible de 12% sobre los primeros \$20 000 de ganancias gravables y de 16% sobre el resto de las ganancias.
Calcular los valores de las constantes A y B para que la función de impuestos $T(x)$ sea continua para todo x.

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0; \\ A + 0.12x & \text{si } 0 < x \le 20\,000; \\ B + 0.16(x - 20,000) & \text{si } x > 20\,000. \end{cases}$$

▼ La función de impuestos $T(x)$ que se da, es polinomial por partes y por lo tanto continua en cada uno de los intervalos semiabiertos $(-\infty, 0]$, $(0, 20\,000]$ y $(20\,000, +\infty)$. Entonces, sólo debemos cuidar la continuidad de $T(x)$ en los puntos $x = 0$ & $x = 20\,000$.

Ya que

$$\lim_{x\to 0^-} T(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

y también que

$$\lim_{x\to 0^+} T(x) = \lim_{x\to 0^+} (A + 0.12x) = A + 0 = A,$$

entonces,

$$\lim_{x\to 0} T(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} T(x) = \lim_{x\to 0^+} T(x) \Leftrightarrow A = 0.$$

Y puesto que

$$\lim_{x\to 20\,000^-} T(x) = \lim_{x\to 20\,000} (0.12x) = (0.12)20\,000 = 2\,400$$

y también que

$$\lim_{x\to 20\,000^+} T(x) = \lim_{x\to 20\,000} [B + 0.16(x - 20\,000)] = B + 0.16(20\,000 - 20\,000) = B + 0 = B,$$

entonces,

$$\lim_{x\to 20\,000} T(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x\to 20\,000^-} T(x) = \lim_{x\to 20\,000^+} T(x) \Leftrightarrow B = 2\,400.$$

Por lo tanto, la función de impuestos es (hasta aquí)

$$T(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le 1;\\ 0.12x & \text{si } 0<x\le 20\,000;\\ 2\,400+0.16(x-20\,000) & \text{si } x>20\,000.\end{cases}$$

Nótese ahora que

$$T(0)=0 \ \&\ \lim_{x\to 0}T(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}T(x)=T(0);$$
$$T(20\,000)=0.12(20\,000)=2\,400 \ \&\ \lim_{x\to 20\,000}T(x)=2\,400 \Rightarrow \lim_{x\to 20\,000}T(x)=T(20\,000),$$

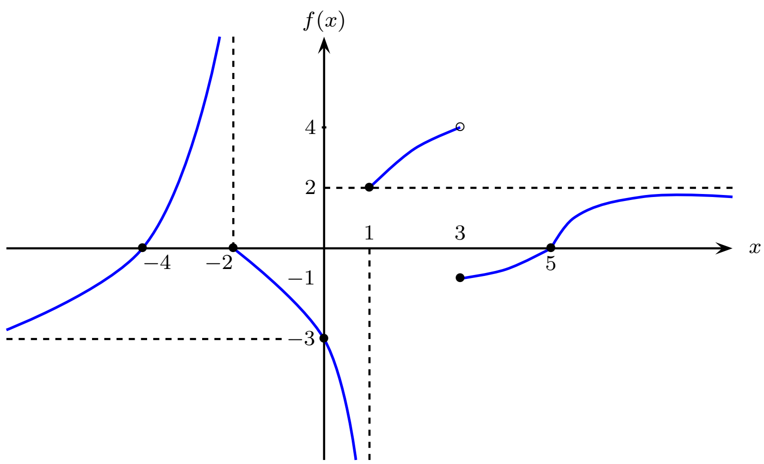
por lo cual, podemos afirmar que $T(x)$ es continua en $x=0$ y en $x=20\,000$.
Luego entonces, $T(x)$ es una función continua para toda x.

□

(5) Dar un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$ que cumpla los requisitos siguientes:
Es continua en los intervalos $(-\infty,-2)$, $[-2,1)$, $[1,3]$ y en $(3,+\infty)$; y además:

$$\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3; & \lim\limits_{x\to-4}f(x)=0; & \lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=+\infty;\\ \lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=0; & \lim\limits_{x\to 0}f(x)=-3; & \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty;\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2; & \lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=4; & \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=-1.\\ \lim\limits_{x\to 5}f(x)=0; & \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2; & \end{array}$$

▼ Un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$ que cumple con los requisitos pedidos, es:



□

(C) Tercer parcial

(1) Dada la función definida por $f(x)=(4-x)x^{1/3}$,
obtener: intervalos de crecimiento y de decrecimiento; puntos críticos y su clasificación; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.

▼ Derivamos:

$$f(x)=(4-x)x^{1/3}=4x^{1/3}-x^{4/3}$$
$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{-2/3}-\frac{4}{3}x^{1/3}=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{x^{2/3}}-x^{1/3}\right]=\frac{4}{3}\left(\frac{1-x}{x^{2/3}}\right).$$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

La función f es creciente si $f'(x) > 0$ y es decreciente si $f'(x) < 0$.
Primero resolvemos la igualdad $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(\frac{1-x}{x^{2/3}}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Luego, excluimos $x = 0$ ya que $f'(0)$ no existe y así obtenemos los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Intervalo	Valor prueba	$f'(x) =$	f es estrictamente
$-\infty < x < 0$	$x = -1$	$\frac{8}{3} > 0$	creciente
$0 < x < 1$	$x = \frac{1}{8}$	$\frac{14}{3} > 0$	creciente
$1 < x < +\infty$	$x = 8$	$-\frac{7}{3} < 0$	decreciente

Entonces, la función f es estrictamente creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, 1)$, y estrictamente decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

Puntos críticos y su clasificación:

Por el inciso anterior se sabe que: $f'(x) = 0$ en $x = 1$, la función f es creciente en el intervalo $(0, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.
Luego entonces, por el criterio de la primera derivada, la función f tiene en $x = 1$ un máximo local estricto.
Las coordenadas de dicho punto son $[1, f(1)] = (1, 3)$.

Intervalos de concavidad:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^{-2/3} - \frac{4}{3}x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}\left(-\frac{2}{3}x^{-5/3} - \frac{1}{3}x^{-2/3}\right) =$$
$$= -\frac{4}{9}\left(\frac{2}{x^{5/3}} + \frac{1}{x^{2/3}}\right) = -\frac{4}{9}\left(\frac{2+x}{x^{5/3}}\right).$$

La función f es cóncava hacia arriba si $f''(x) > 0$ y es cóncava hacia abajo si $f''(x) < 0$.
Primero resolvemos la igualdad $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{9}\left(\frac{x+2}{x^{5/3}}\right) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Luego excluimos $x = 0$ ya que $f''(0)$ no existe y así obtenemos los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ y $(0, +\infty)$.

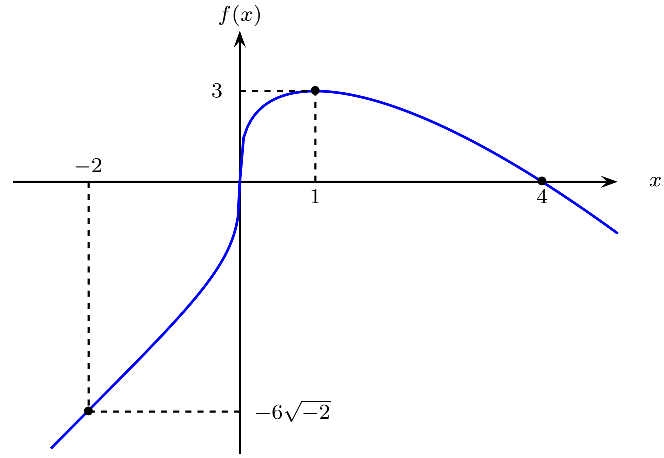
Intervalo	Valor prueba	$f''(x) =$	f es cóncava hacia
$-\infty < x < -2$	$x = -8$	$-\frac{1}{12} < 0$	abajo
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$\frac{4}{9} > 0$	arriba
$0 < x < +\infty$	$x = 8$	$-\frac{5}{36} < 0$	abajo

Entonces, la función f es cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(0, +\infty)$, y es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-2, 0)$.

Puntos de inflexión:

La función f tiene cambios de concavidad en $x = -2$ y en $x = 0$; además, es continua en dichos puntos.
Por esto, tiene puntos de inflexión en $x = -2$ y en $x = 0$. Las coordenadas de dichos puntos de inflexión son $[-2, f(-2)] = (-2, -6\sqrt[3]{-2})$ y $[0, f(0)] = (0, 0)$.

Es importante notar que en $x = 0$, la función f es continua, no es derivable, no tiene máximo ni mínimo local y tiene punto de inflexión.
Un bosquejo de la gráfica es el siguiente:



□

(2) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva

$$x^2y^2 = (y+1)^2(4-y^2)$$

en el punto $(0,-2)$.

▼ Suponemos que en la ecuación dada se tiene implícitamente definida a $y = \phi(x)$.
Derivando implícitamente con respecto a x se obtiene:

$$\frac{d}{dx}(x^2y^2) = \frac{d}{dx}[(y+1)^2(4-y^2)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\frac{d}{dx}y^2 + y^2\frac{d}{dx}x^2 = (y+1)^2\frac{d}{dx}(4-y^2) + (4-y^2)\frac{d}{dx}(y+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 2y\frac{dy}{dx} + y^2 2x = (y+1)^2(-2y)\frac{dy}{dx} + (4-y^2)2(y+1)\frac{dy}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2y\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = -2y(y+1)^2\frac{dy}{dx} + 2(4-y^2)(y+1)\frac{dy}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2y\frac{dy}{dx} + 2y(y+1)^2\frac{dy}{dx} - 2(4-y^2)(y+1)\frac{dy}{dx} = -2xy^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}[2x^2y + 2y(y+1)^2 - 2(4-y^2)(y+1)] = -2xy^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2[x^2y + y(y^2+2y+1) - (4y+4-y^3-y^2)]\frac{dy}{dx} = -2xy^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2[x^2y + y^3 + 2y^2 + y - 4y - 4 + y^3 + y^2]\frac{dy}{dx} = -2xy^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2[x^2y + 2y^3 + 3y^2 - 3y - 4]\frac{dy}{dx} = -2xy^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^2}{2(x^2y + 2y^3 + 3y^2 - 3y - 4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-xy^2}{x^2y + 2y^3 + 3y^2 - 3y - 4}\,.$$

Valuamos en el punto $(0,-2)$; esto es, $x = 0$ & $y = -2$:

$$\frac{dy}{dx}(0,-2) = \frac{0}{0 + 2(-8) + 3(4) + 6 - 4} = \frac{0}{-2} = 0.$$

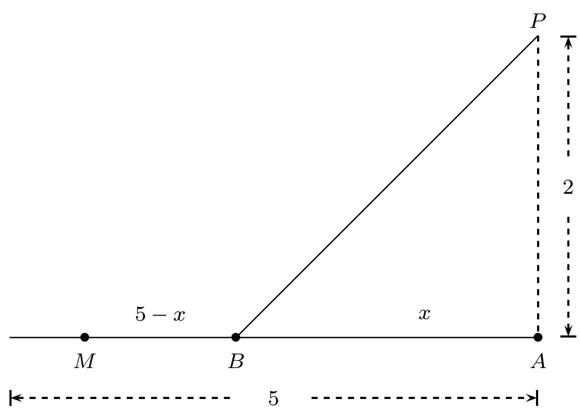
Entonces, la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(0,-2)$ es $m = 0$.
Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$y - (-2) = m(x - 0) \Rightarrow y + 2 = 0(x - 0) \Rightarrow y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2.$$

□

(3) En un concurso de resistencia, los concursantes están 2 millas mar adentro y tienen que llegar a un sitio en la orilla (tierra firme) que está a 5 millas al oeste (la orilla va de este a oeste). Suponiendo que un concursante puede nadar a 4 millas por hora y correr a 10 millas por hora, ¿hacia qué punto de la orilla debe nadar para minimizar el tiempo total de recorrido?

▼ Usamos la figura:



Sean P el punto de partida, A el punto de la playa más cercano a P, M la meta y B el punto de la playa donde el concursante sale del mar.
Es decir: $\overline{PA} = 2$ millas, $\overline{MA} = 5$ millas, $\overline{PB}$ es recorrido a nado y $\overline{BM}$ corriendo por la playa.
Si suponemos que B está a x millas de A, entonces

$$\overline{BA} = x \, \overline{MB} = 5 - x \text{ \&}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Si el concursante nada $\overline{PB} = \sqrt{x^2 + 4}$ millas a razón de 4 millas por hora, entonces el tiempo que tarda nadando es $t_n = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{4}$ horas.
Si el concursante corre $\overline{MB} = 5 - x$ millas a razón de 10 millas por hora, entonces el tiempo que tarda corriendo es $t_c = \dfrac{5 - x}{10}$ horas.
El tiempo total de recorrido del concursante es

$$t = t_n + t_c = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4} + \frac{5 - x}{10}\,.$$

Es decir,

$$t(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{10}(5 - x), \text{ con } 0 \le x \le 5,$$

que es la función que debemos minimizar.

$$t'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)(x^2+4)^{-1/2}2x+\frac{1}{10}(-1)=\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{10};$$

$$t'(x)=0\Rightarrow\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{10}=0\Rightarrow\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{10}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x=4\sqrt{x^2+4}\Rightarrow(10x)^2=4^2(x^2+4)\Rightarrow 100x^2=16x^2+64\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100x^2-16x^2=64\Rightarrow 84x^2=64\Rightarrow x^2=\frac{64}{84}\approx 0.762\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\approx\sqrt{0.762}\approx 0.87.$$

Entonces, $t(x)$ tiene un punto crítico en $x\approx 0.87$.
Valuaremos ahora $t(x)$ en $x=0.87$, $x=0$ & $x=5$, para comparar los tiempos obtenidos y decidir cuál es el menor.

$$t(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{5-x}{10}$$

$$t(0.87)=\frac{\sqrt{(0.87)^2+4}}{4}+\frac{5-0.87}{10}\approx 0.9582\text{ hora}$$

$$t(0)=\frac{\sqrt{0^2+4}}{4}+\frac{5-0}{10}=1\text{ hora}$$

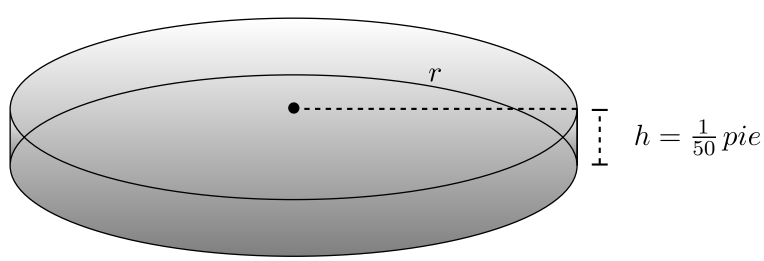
$$t(5)=\frac{\sqrt{5^2+4}}{4}+\frac{5-5}{10}\approx 1.34629\text{ horas.}$$

Luego entonces, el tiempo mínimo es 0.9582 de hora.

□

(4) Un derrame de petróleo adopta una forma circular y tiene un espesor de $\dfrac{1}{50}$ pie. Si el petróleo se está escapando a razón de 40 pies^3/min, ¿a qué razón está aumentando el radio de la mancha de petróleo cuando el radio es de 50 pies?

▼ Sea la figura:



Notamos que el derrame tiene la forma de un cilindro recto circular, con una altura o espesor constante $h=\dfrac{1}{50}$ pie y un radio variable r en función del tiempo $t\geq 0$.
Considerando que $r=r(t)$ está en pies, el volumen del derrame V, medido en pies^3, es

$$V=\pi r^2h=\pi r^2\left(\frac{1}{50}\right)=\frac{\pi}{50}r^2,$$

es decir,

$$V(t) = \frac{\pi}{50}[r(t)]^2.$$

La razón de cambio del volumen al paso del tiempo es

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\pi}{50}r^2(t)\right] = \frac{\pi}{50} \times 2 \times r(t)\frac{d}{dt}r(t),$$

esto es,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{25}r\left(\frac{dr}{dt}\right).$$

Como el petróleo se está escapando a razón de 40 pies^3/min, entonces, $\dfrac{dV}{dt} = 40.$

Por lo tanto

$$\frac{\pi}{25}r\left(\frac{dr}{dt}\right) = 40.$$

En el instante en que el radio es $r = 50$ pies, sucede que $\dfrac{\pi}{25}(50)\dfrac{dr}{dt} = 40$, de donde

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(40)25}{50\pi} = \frac{20}{\pi},$$

que es la rapidez de cambio del radio.

Esto es, el radio está aumentando a razón de $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{20}{\pi}$ pies/min.

$\square$